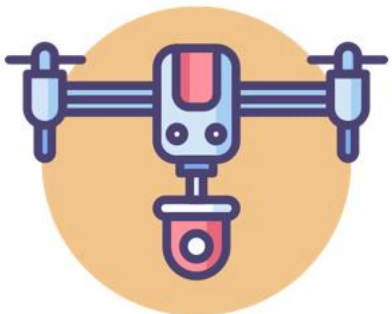
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه دهم

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

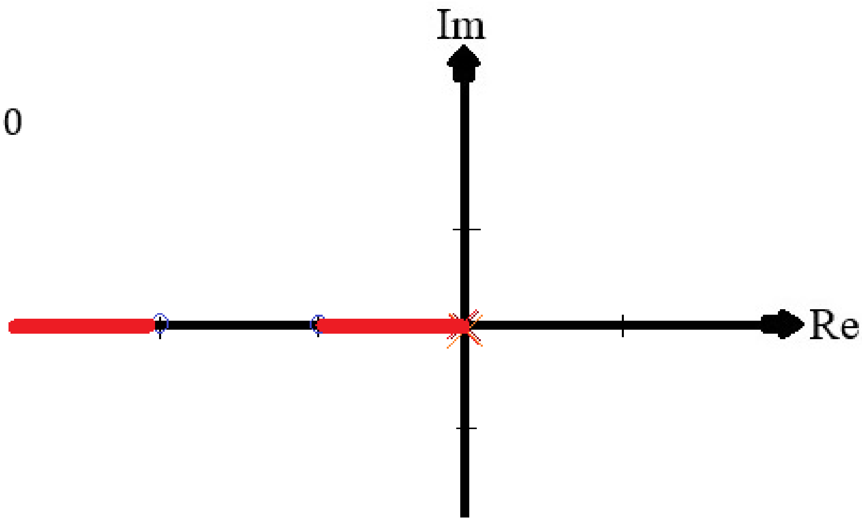
مثال: مکان هندسی ریشه های معدله مشخصه زیر را به ازاء $K > 0$ بدست آورید.

$$1)\ \boldsymbol{f(s) = s^3 + k(s+1)(s+2) = 0}$$

$$\Delta = 1 + \mathrm{k}G(s)H(s) = 0$$

$$f(s) = 1 + k\frac{(s+1)(s+2)}{s^3} = 0$$

$$\begin{cases} z \Longrightarrow s_{1,2} = -1, -2 \\ p \Longrightarrow s_{1,2,3} = 0,0,0 \end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب

تعداد مجانب ها $\quad m = 2\ , n = 3 \Longrightarrow n - m = 1$

یک زاویه مجانبی لازم داریم

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{1} = \left\{ \underbrace{\pi}_{k=0} \right\}$$

و محل برخورد مجانب ها دیگر معنی ندارد:

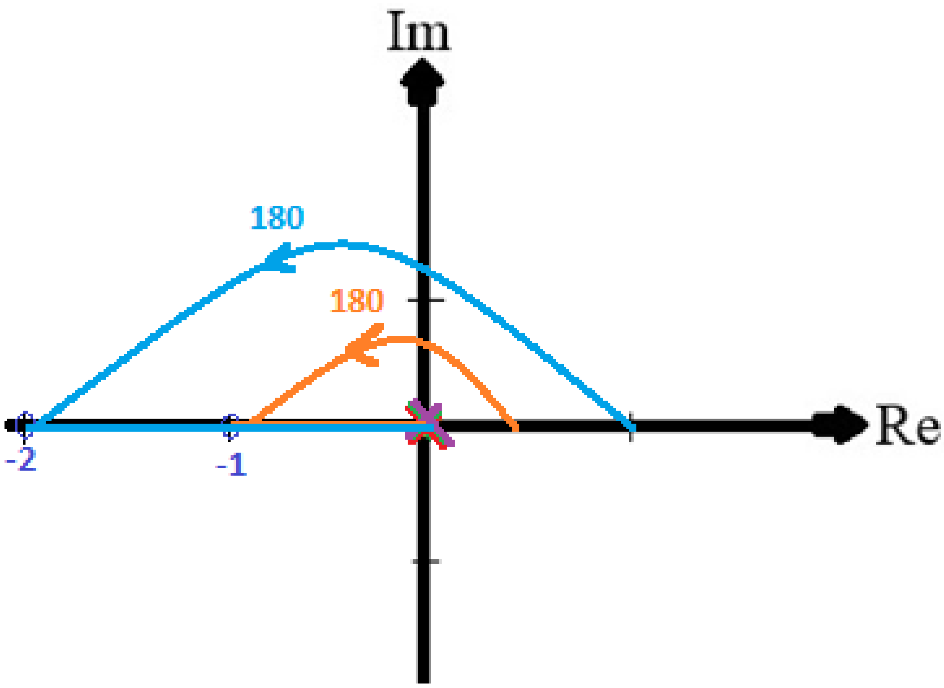
زاویه خروج از قطب مختلط بصورت زیر بدست می آید:

زاویه خروج از قطب زاویه‌ای است که به ازای $K > 0$ مکان هندسی ریشه ها از قطب‌های حلقه باز خارج شود.

شرط زاویه $\Longrightarrow$ مجموع زاویه صفر ها – مجموع زاویه قطب ها = $(2i+1)$۱۸۰

برای استفاده از شرط زاویه یک قطب را در نظر گرفته و دیگر صفرها و قطب‌ها را به آن وصل می‌کنیم سپس زاویه خروج از آن قطب را محاسبه می‌کنیم.

محاسبه زاویه خروج سه قطب θ_1 و θ_2 و θ_3



$$(180+180)-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=(2i+1)180$$

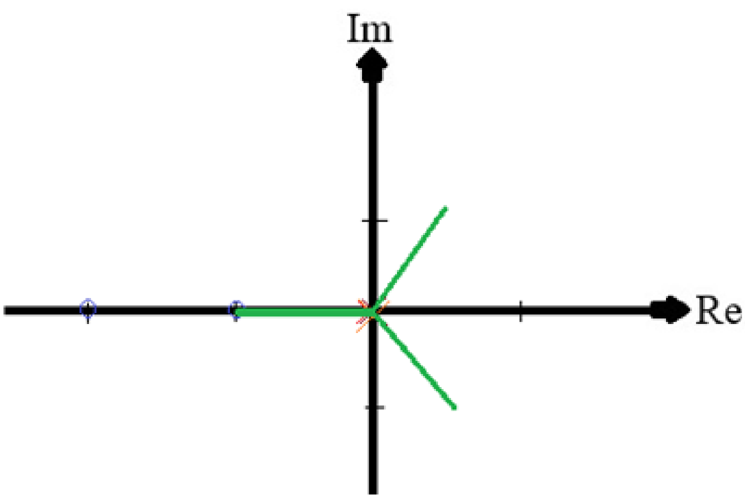
$$-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=(2i+1)180-360$$

$$-3\theta=(2i+1)180-360$$

$$i=0 \Longrightarrow \theta=\frac{(2i+1)180-360}{-3}=60$$

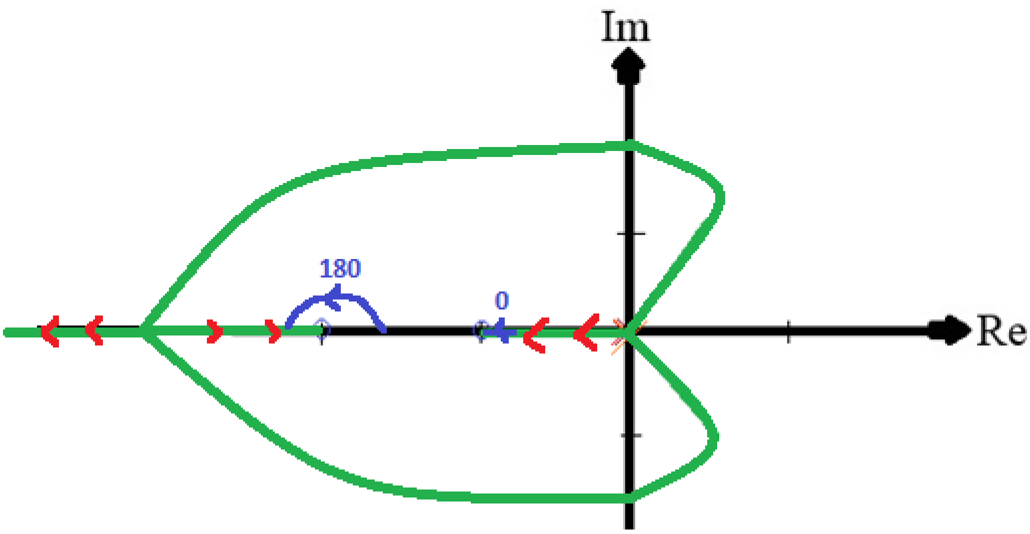
$$i=1 \Longrightarrow \theta=\frac{(2i+1)180-360}{-3}=-60$$

$$i=2 \Longrightarrow \theta=\frac{(2i+1)180-360}{-3}=-180$$



نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌هایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار دارند یا زاویه‌ی ورود به صفرهایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار می‌گیرند صفر یا ۱۸۰ می‌باشد.

اگر مکان هندسی سمت راست قطب یا صفر باشد زاویه صفر و اگر سمت چپ قطب یا صفر باشد ۱۸۰ است.



جدول راث را رسم می کنیم که آیا مکان هندسی ریشه‌ها به محور $j\omega$ برخورد می‌کند یا نه:

$s^3 + ks^2 + 3ks + 2k = 0$

S^3	1	$3k$
S^2	k	$2k$
S^1	$\frac{3k^2 - 2k}{k}$	0
s^0		

$\Rightarrow$

S^3	1	$3k$
S^2	k	$2k$
S^1	$3k - 2$	0
s^0		

چون که می‌خواهیم محل برخورد معادله با محور $j\omega$ را بدست آوریم، پس باید یک سطر کاملا صفر داشته باشیم.

$$3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = \frac{2}{3}$$

از معادله بالایی سطر صفر کمک می‌گیریم.

s^3	1	$3k$
s^2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
s^1	0 ~~$3k-2$~~	0
s^0		

$$\frac{2}{3}s^2+2k \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{3}s^2+2k\right)=\frac{4}{3}s$$

محل برخورد با محور $j\omega$ در $k=\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}s^2+2\left(\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow s^2=-2\begin{cases}s_1=+j\sqrt{2}=+j1.41\\ s_2=-j\sqrt{2}=-j1.41\end{cases}$$

s^3	1	$3k$
s^2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
s^1	0 ~~$3k-2$~~	0
s^0		

s^3	1	$3k$
s^2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
s^1	$\frac{4}{3}$	0
s^0	$\frac{4}{3}$	0

محاسبه نقطه شکست:

$$T(s)=G_1(s)H_1(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{s^3}\Rightarrow\frac{-1}{T(s)}$$

$$\frac{-1}{T(s)}=\frac{\frac{-1}{1}}{\frac{(s+1)(s+2)}{s^3}}=\frac{-s^3}{(s+1)(s+2)}=\frac{-s^3}{s^2+3s+2}$$

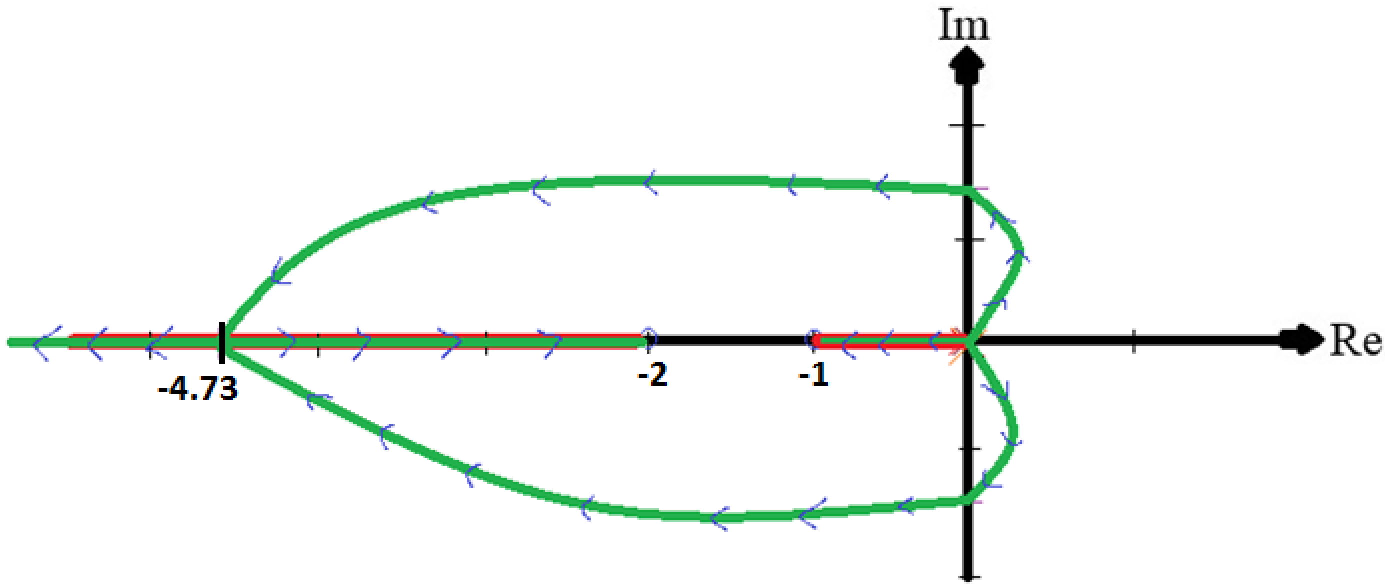
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-s^3}{s^2+3s+2}\right)=\frac{-3s^2(s^2+3s+2)-(2s+3)(-s^3)}{(s^2+3s+2)^2}=0$$

$$-3s^4-9s^3-6s^2+2s^4+3s^3=0\Rightarrow -s^4-6s^3-6s^2$$

$$\Rightarrow -s^2(s^2+6s+6)$$

$$s=0\,,\qquad s=0\,,\qquad s=-4.73\,,\qquad s=-1.27$$

که فقط $s=-4.73$ قابل قبول است.



سیستم برای $k < \frac{2}{3}$ ناپایدار هست .

سیستم برای $k = \frac{2}{3}$ پایداری مرزی دارد.

سیستم برای $k > \frac{2}{3}$ پایدار هست.

مثال: محدوده پایداری سیستم را به ازای تغییرات پارامتر K مشخص نمایید.

$$\mathbf{1)}\ \Delta(s) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{2S+K}}{\mathbf{S^2(S+1)}}$$

در این مثال پارامتر K بهره سیستم نمی باشد. بنابراین ابتدا باید معادله مشخصه را به فرم استاندارد تبدیل نماییم:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{2s+K}{s^2(s+3)} = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^2(s+3) + 2s + K = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\rightarrow \Delta(s) = s(s^2+3s+2) + K = 0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + K\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

برای رسم مکان ریشه ها مراحل ۹ گانه را به ترتیب انجام می دهیم:

$$T(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -2 \end{cases}$$

تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =

منظور از مجانب ها این است که به ازاء K های خیلی بزرگ قطب ها در چه خطی قرار می‌گیرند

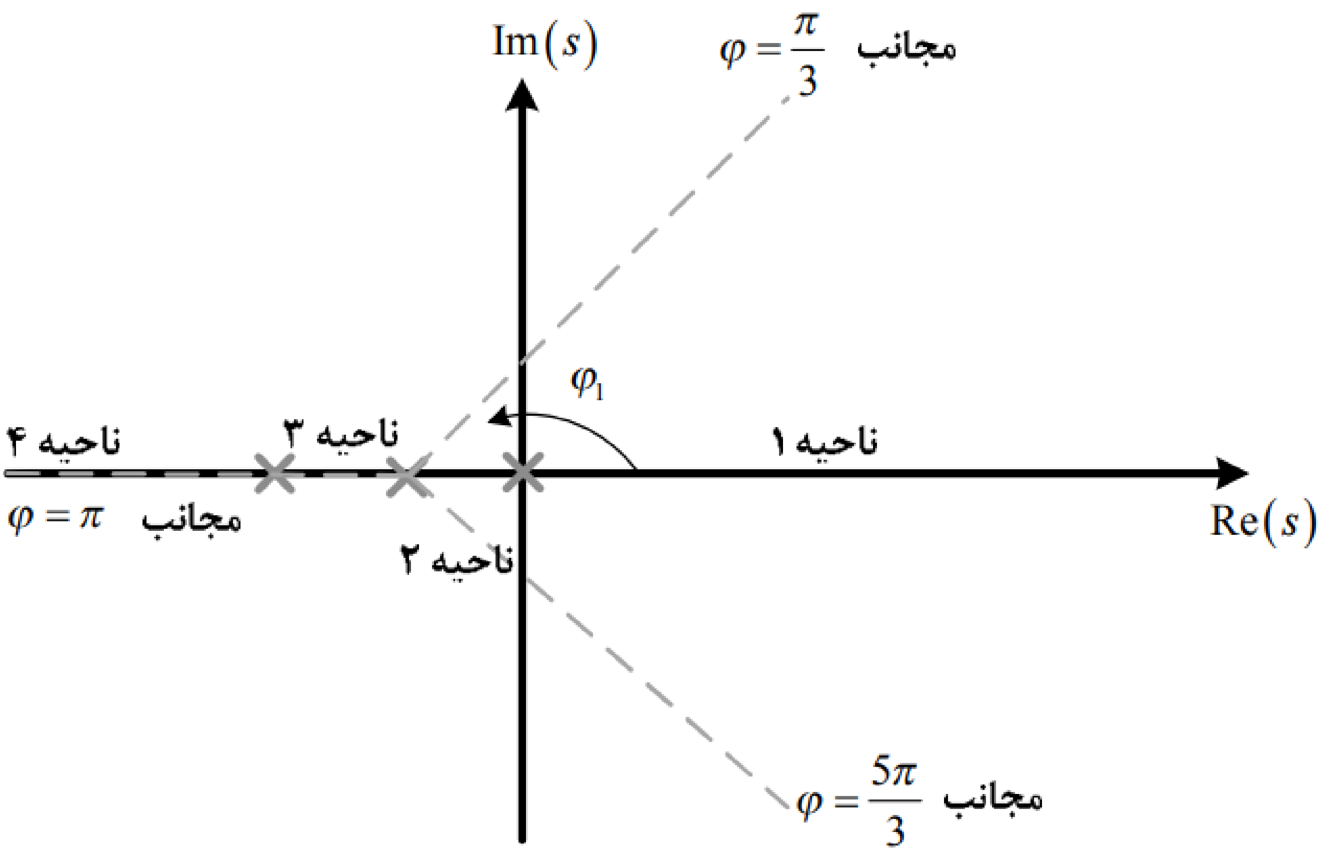
$$n - m = 2 - 0 = 3$$

سه زاویه مجانبی لازم داریم:

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \left\{ \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{k=0}, \underbrace{\pi}_{k=1}, \underbrace{\frac{5\pi}{3}}_{k=2} \right\}$$

محل تلاقی مجانب ها (σ):

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{0+(-1)+(-2)}{3} = -1$$



سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفري وجود ندارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۲ یک قطب وجود دارد (فرد) مکان هست. بین دو قطب نقطه شکست داریم.

سمت راست ناحیه ۳ دو قطب وجود دارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ٤ سه قطب وجود دارد (فرد) مکان هست.

نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌هایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار دارند یا زاویه‌ی ورود به صفرهایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار می‌گیرند صفر یا ۱۸۰ می‌باشد.

اگر مکان هندسی سمت راست قطب یا صفر باشد زاویه صفر و اگر سمت چپ قطب یا صفر باشد ۱۸۰ است.

با استفاده از جدول روث –هورویتز محل برخورد با محور موهومی $(j\omega)$ مشخص می شود:

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 3 & K \\
\hline
s & \dfrac{6-K}{3} & 0 \\
1 & K & 0
\end{array}
\rightarrow 6-K=0 \rightarrow K=6
$$

بنابراين به ازاي $k < 6$ سیستم پایدار خواهد بود. به ازاي $k = 6$ سیستم پایدار مرزی خواهد بود. ریشه های متناظر با این بهره از حل معادله کمکی سطر قبل بدست می آید:

که محل برخورد با محور موهومی $(j\omega)$ است. $3s^2+K=3s^2+6=0 \rightarrow s=\pm\sqrt{2}j$

محاسبه نقطه شکست:

نقاط شکست مکان جایی وجود دارند که مکان بین دو قطب یا دو صفر قرار گیرد. (هرگاه دو قطب یا دو صفر در کنار هم و روی محور حقیقی قرار گیرند همواره در بین آن دو نقطه شکست خواهیم داشت.)

$$T(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)} \rightarrow -\frac{1}{T(s)}=-s(s+1)(s+2)$$

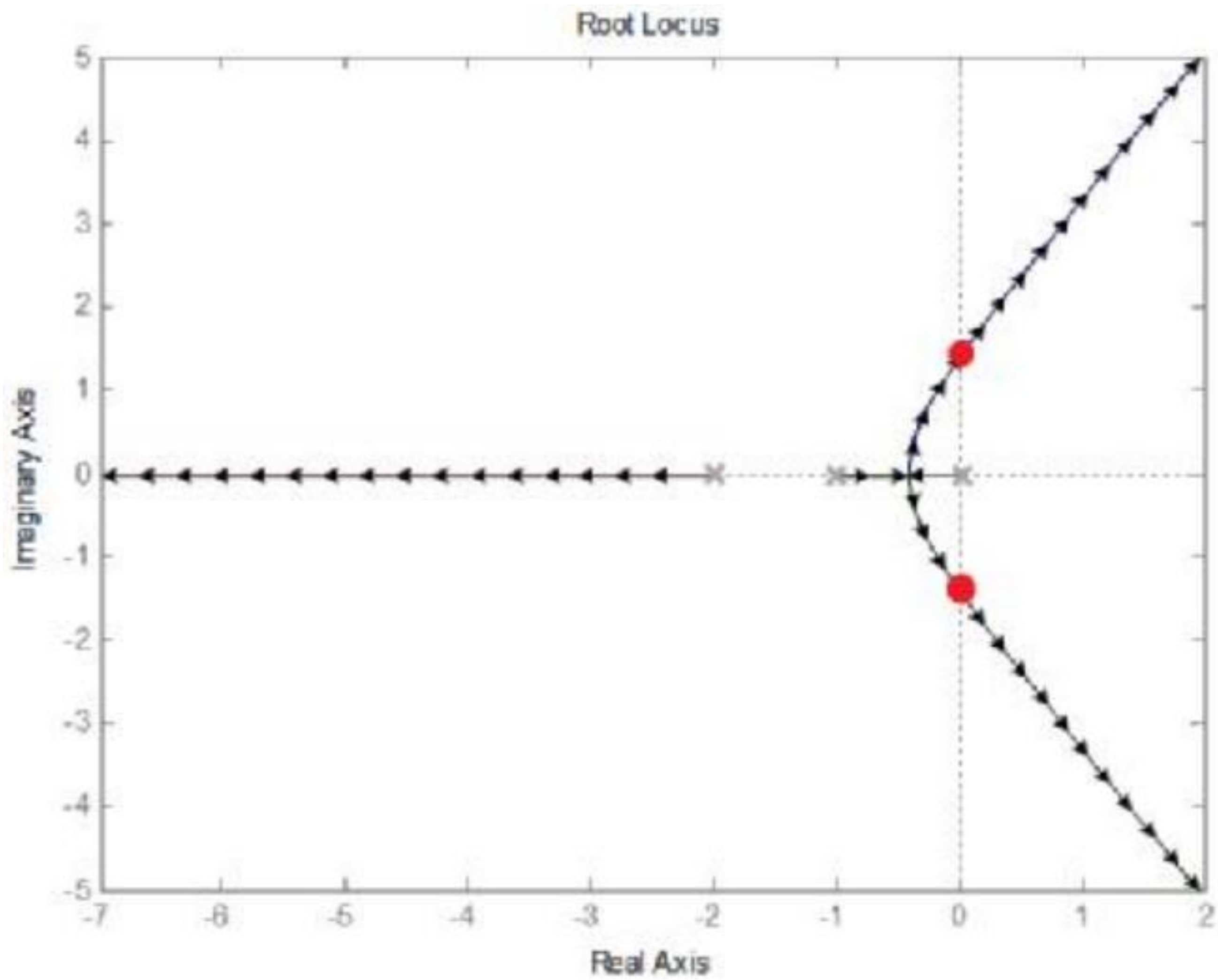
$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left(-s(s+1)(s+2)\right)=-\frac{d}{ds}\left(s^3+3s^2+2s\right)=-\left(3s^2+6s+2\right)=0$$

$$\rightarrow 3s^2+6s+2=0 \rightarrow s=\begin{cases}-1.58\\ -0.423\boxed{\checkmark}\end{cases}$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود.

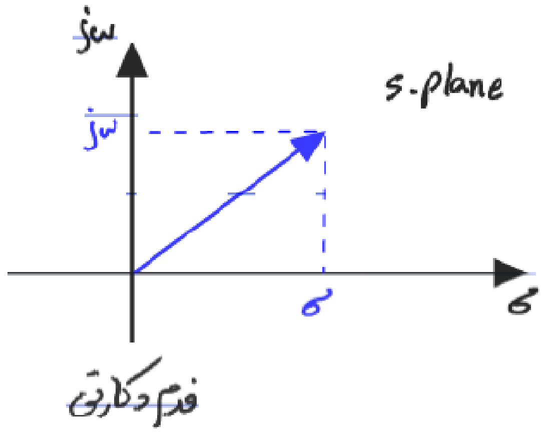
جهت فلش ها در نمودار مکان ریشه جهت افزایش K را نشان می دهد.

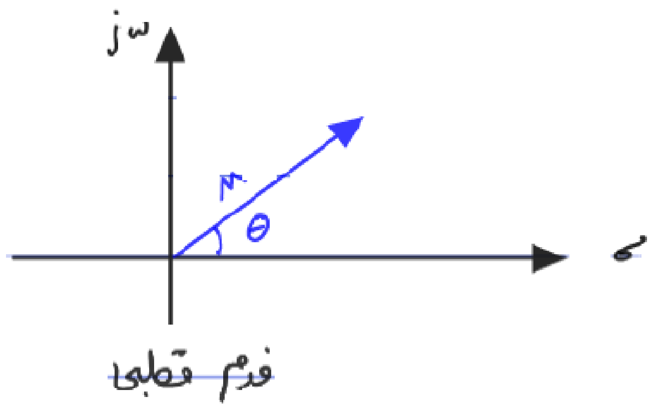
محل برخورد نمودار مکان ریشه ها با محور موهومی که در شکل زیر مشخص شده اند، مرز پایداري سیستم را نشان می دهد.



یادآوری ریاضی مهندسی توصیف برداری یک عدد مختلط

هر عدد مختلط به فرم دکارتی $s = \sigma + j\omega$ را می‌توان به فرم قطبی $M\measuredangle\theta$ نمایش داد.



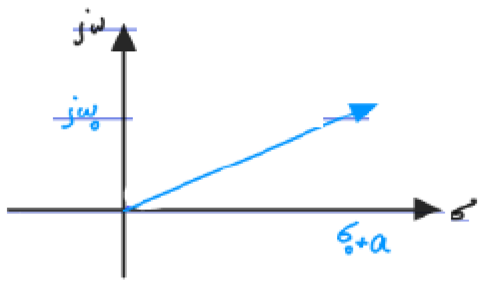


تابع مختلط:

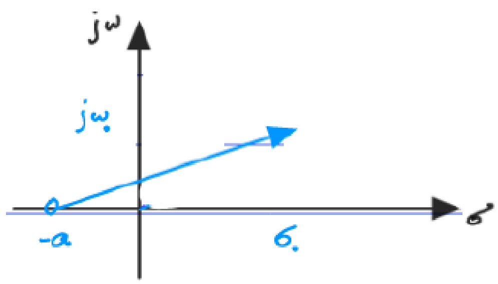
اگر یک عدد مختلط را در یک تابع مختلط مانند $F(s)$ قرار گیرد خروجی باز هم به طور کلی یک عدد است که می‌توان حقیقی یا مختلط باشد.

$$F(s) = (s+a) \xrightarrow{s^* = \sigma_0 + j\omega_0} F(s^*) = \underbrace{(\sigma_0 + a)}_{\text{مقدار حقیقی}} + \underbrace{j\omega_0}_{\text{موهومی}} \quad \text{عدد مختلط خروجی}$$

نمایش خروجی



همانطور که می‌دانید تابع $F(s) = (s+a)$ صفری در $-a$ دارد اگر بردار را به اندازه a واحد به سمت چپ شیفت دهیم نمایش دیگری از این بردار با مبدا صفر $F(s)$ خواهیم داشت که مقدار اندازه و فاز خروجی تغییری نکرده است.

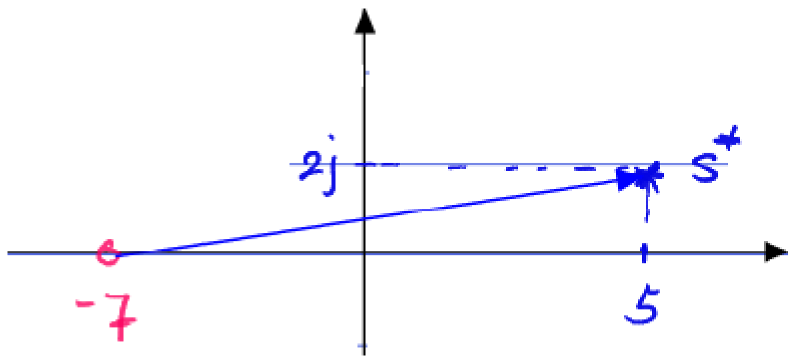


حال می‌توان گفت $s + a$ تابعی مختلطی است که خروجی این تابع در نقطه s^* همان بردار رسم شده از صفر تابع تا نقطه s^* است.

مثال: مقدار تابع $s + 7$ به ازای $s^* = 5 + 2j$ را به صورت گرافیکی نمایش دهید.

$$F(s) = s + 7$$

$$s^* = 5 + 2j$$



خروجی این تابع یک عدد مختلط است با اندازه M^* و فاز θ^* است.

محاسبه مقدار خروجی تابع مختلط به صورت گرافیکی

اگر تابع مختلط را به صورت زیر بنویسیم:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s+p_i)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

m درجه صورت

n درجه مخرج

برای پیدا کردن مقدار این تابع در نقطه‌ای دلخواه به صورت قطبی می‌توان گفت:

اندازه مقدار تابع $F(s)$ در نقطه s^*

$$M = \frac{\text{حاصلضرب طول بردار صفرها تا } s^*}{\text{حاصلضرب طول بردار قطب ها تا } s^*} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s+p_i|} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |l_i|}{\prod_{i=1}^{n} |l_i|}$$

$|s + z_i|$: اندازه بردار بین z_i تا نقطه آزمون s^*

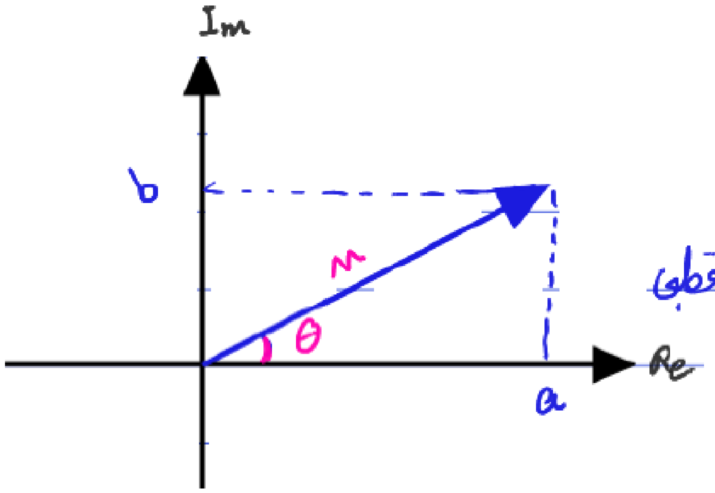
فاز مقدار تابع $F(s)$ در نقطه s^*:

$$\theta = \sum \text{زوایای صفرها تا نقطه } s^* - \sum \text{زوایای قطب‌ها تا نقطه } s^*$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \measuredangle (s+p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \angle (s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle (s+p_j)$$ فاز صفر تابع تا نقطه آزمون s^*

اعداد مختلط $s^* = a + bj$

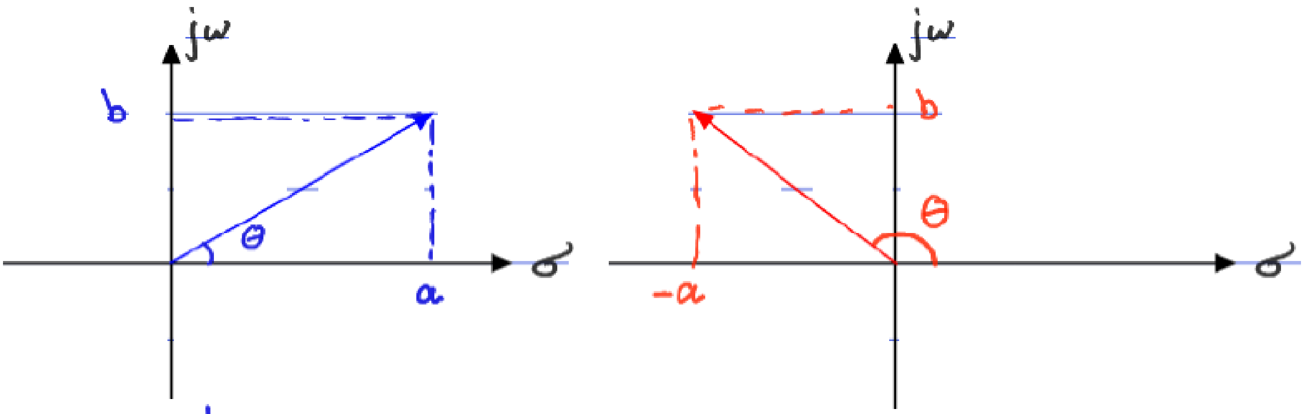


فرم دکارتی: $s^* = a+bj$

فرم قطبی: $s^* = m e^{j\theta} = m \measuredangle \theta$

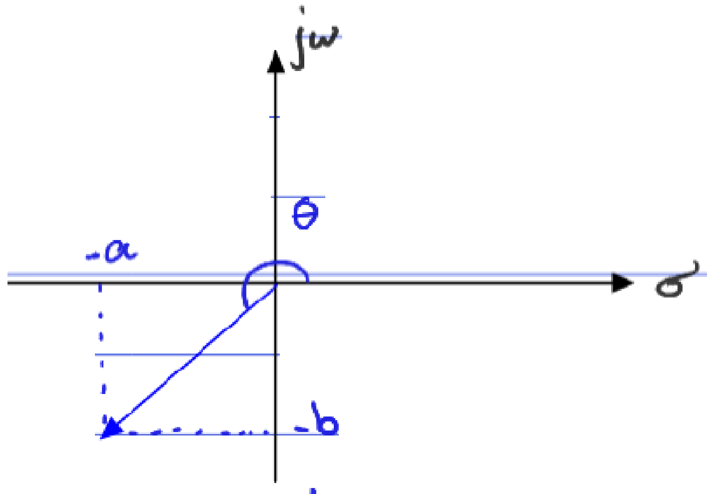
فاز اعداد مختلط:

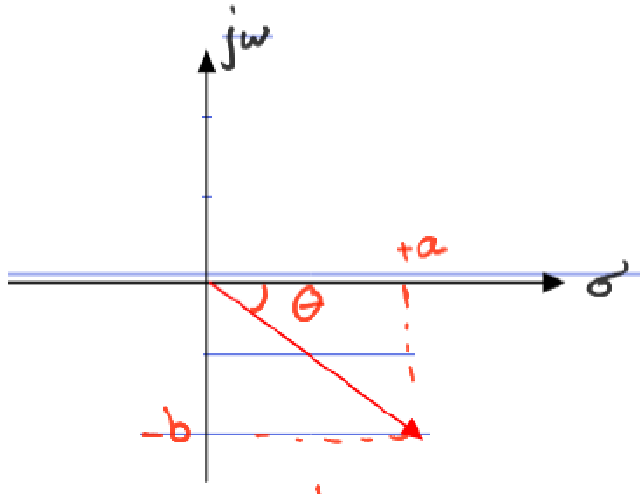
فاز اعداد مختلط نسبت به محور حقیقی مثبت سنجیده می‌شود. با توجه به قرار گیری بردار در نواحی چهار گانه فاز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.



$\theta = tg^{-1}\frac{b}{a}$

$\theta = \pi - tg^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$





$$\theta = \pi + tg^{-1}\frac{b}{a} = tg^{-1}\frac{b}{a} - \pi$$

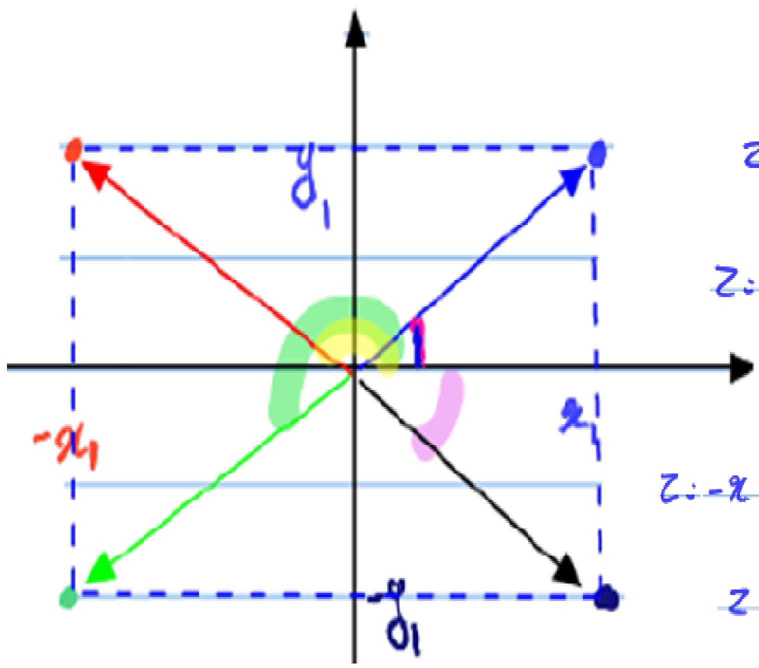
$$\theta = -tg^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$$

اعداد مختلط:

نمایش دکارتی $z = x + jy$ و $j = \sqrt{-1}$

نمایش قطبی $z = |z|\,e^{j\varphi} = |z| \angle \varphi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ و $\angle \varphi = tg^{-1}\frac{y}{x}$

محاسبه φ با توجه به ربع مثلثاتی:



$$z = x_1 + y_1 j \xrightarrow{\text{ربع اول}} \varphi = tg^{-1}\frac{y_1}{x_1}$$

$$z = -x_1 + jy_1 \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \varphi = \pi - tg^{-1}\frac{y_1}{x_1}$$

$$z = -x - jy_1 \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \varphi = tg^{-1}\frac{y_1}{x_1} - \pi = \pi + tg^{-1}\frac{y_1}{x_1}$$

$$z = -x + jy_1 \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \varphi = -tg^{-1}\frac{y_1}{x_1}$$

اندازه و فاز تابع مختلط:

$$G(s)=\frac{k\prod^{n}(s+z_i)}{\prod^{m}(s+p_j)} \longrightarrow |G(s)|=\frac{|k|\prod^{n}|s+z_i|}{\prod^{m}|(s+p_j)|}$$

$$\angle G(s)=\underbrace{(\angle k+\angle(s+z_1)+\angle s+z_2 \cdots)}_{\text{مجموع فاز عوامل صورت}}-\underbrace{(\angle s+p_1+\angle s+p_2 \cdots)}_{\text{مجموع فاز عوامل مخرج}}$$

محاسبه فاز به صورت ذهنی

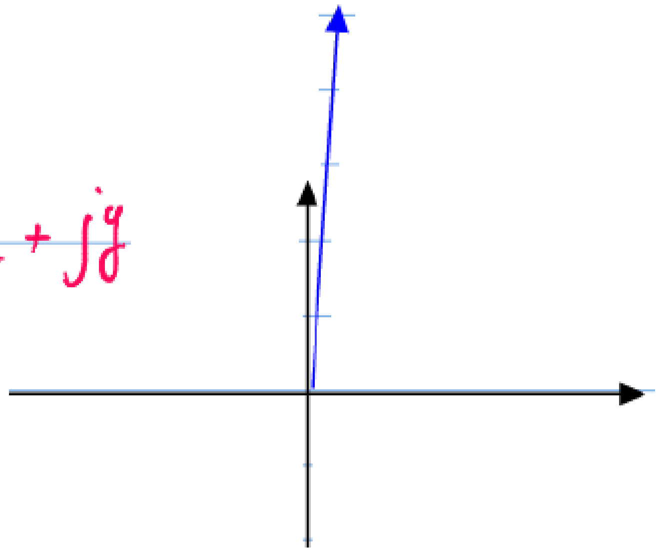
این روش برای محاسبه فاز در حالات خاص بسیار پر کاربرد می‌باشد.

حالت اول : ربع اول

الف) $z = x + j\infty = \varepsilon + jy$

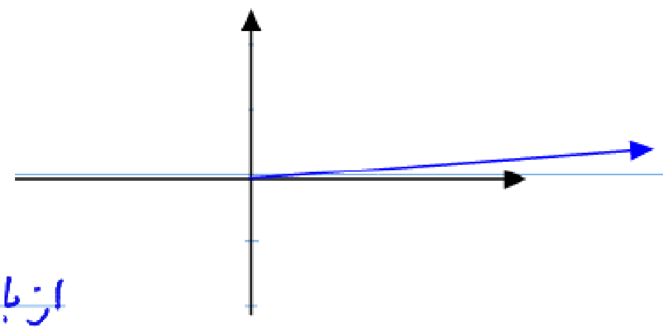
میل می‌کند به 90°

$\angle z = 89^\circ$ یا $90 - \varepsilon$

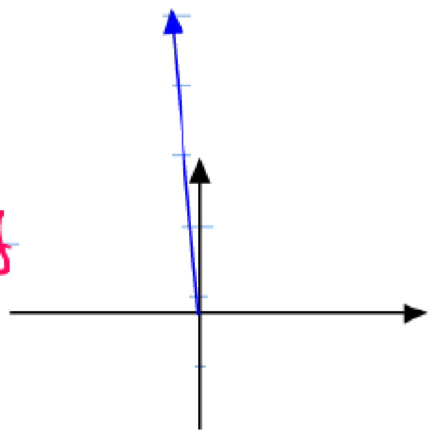


ب) $z = \infty + jy = x + j\varepsilon$

$\angle z = 1^\circ$ یا $+\varepsilon^\circ$ از بالا به صفر میل می‌کند



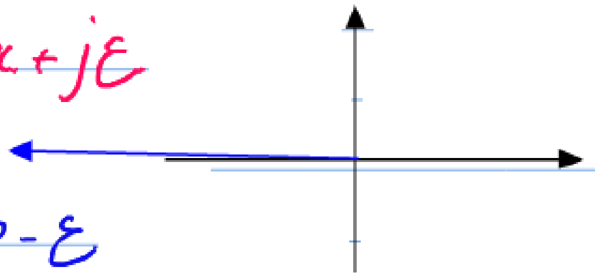
حالت دوم : ربع دوم



الف) $z = -x + j\infty = -\varepsilon + jy$

$\angle z = 91^\circ$ یا $90 + \varepsilon$

ب) $z = -\infty + jy = -x + j\varepsilon$



$\angle z = 179$ یا $180 - \varepsilon$

حالت سوم : ربع سوم

الف) $z = -x - j\infty = -\varepsilon - jy$

$\angle z = -91 = +269 = -90 - \varepsilon$

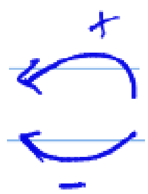
ب) $z = -\infty - jy = -x - j\varepsilon$

$\angle z = 181 = -179 = \pi + \varepsilon$

حالت چهارم : ربع چهارم

الف) $z = x - j\infty = +\varepsilon - jy$

$\angle z = -89^\circ$ یا $271 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$



ب) $z = +\infty - jy = x - j\varepsilon$

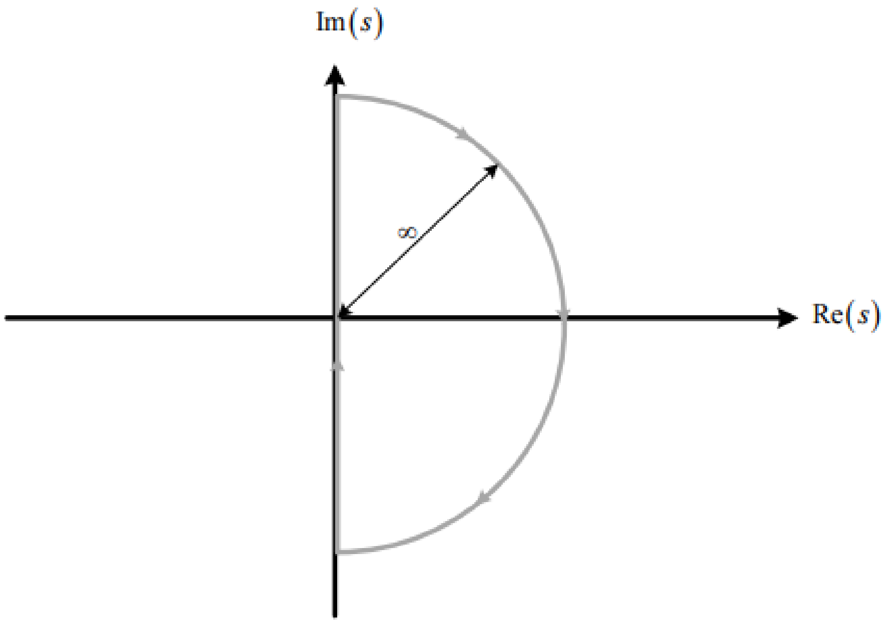
$\angle z = -1^\circ$ یا 359° یا $-\varepsilon$

بررسی پایداری به روش دیاگرام نایکوئیست:

در روش مکان ریشه ها، برای بررسی پایداری سیستم های دارای تاخیر، مجبور به استفاده از تقریب پاده بودیم که لزوماً تقریب مناسبی هم نیست. روش معیار پایداری نایکوئیست یک روش نیمه ترسیمی است که براي بررسی پایداری سیستم های تاخیردار مناسب می باشد. اما این روش مکان و محل ریشه ها را تعیین نمی کند.

معیار پایداری نایکوئیست، رابطه پاسخ فرکانسی حلقه باز $G(j\omega)H(j\omega)$ با تعداد قطب ناپایدار سیستم حلقه بسته را مشخص می کند. با این روش پایداری مطلق سیستم حلقه بسته را می توان به روش ترسیمی و با توجه به منحنی های پاسخ فرکانسی حلقه باز (منحنی نایکوئیست) تعیین کرد. بدون آنکه نیاز به محاسبه قطب های سیستم حلقه بسته باشد.

برای تحلیل پایداری سیستم هاي کنترلی، یک مسیر بسته در صفحه s چنان برمی گزینیم که تمام نیم صفحه راست را در بر داشته باشد. این مسیر را مسیر نایکوئیست می نامند. (جهت مسیر ساعتگرد است)



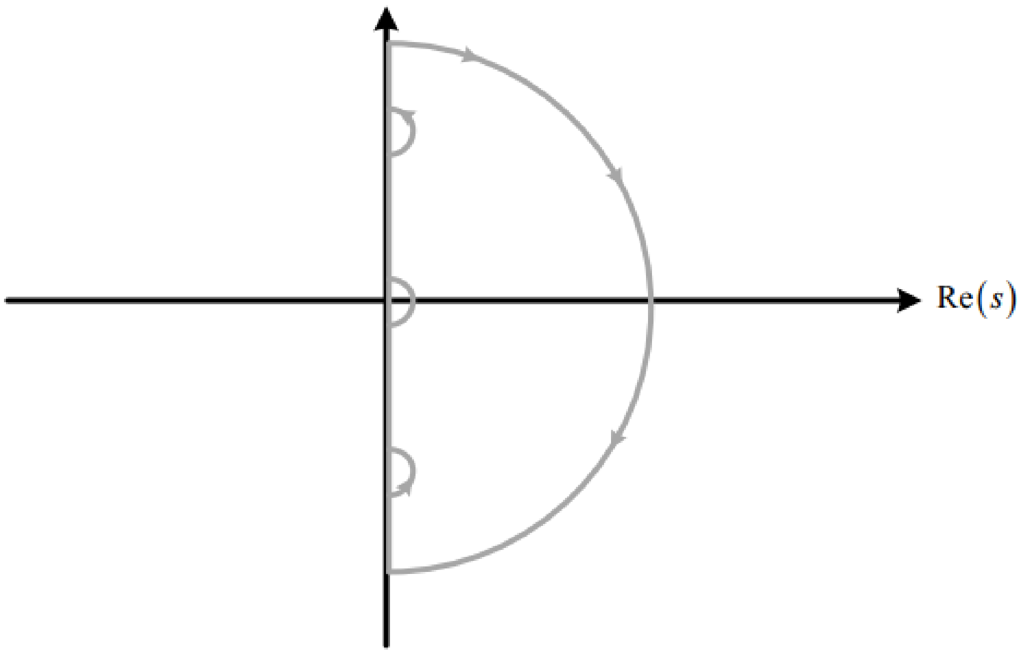
مسیر نایکوئیست تمام نیم صفحه راست را در بردارد و تمام صفر و قطب های دارای بخش حقیقی مثبت (ناپایدار) در داخل آن قرار دارند. اگر $1+G(s)H(s)$ ریشه اي در نیم صفحه راست نداشته باشد سیستم حلقه بسته در نیم صفحه راست قطب ندارد و سیستم پایدار است. مسیر بسته نایکوئیست را به گونه اي انتخاب می کنیم که از هیچ کدام از صفر و قطب هاي $1+G(s)H(s)$ عبور کند. ریشه های

$1+G(s)H(s)$ از حل معادله

$$1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow G(s)H(s)=-1$$

بدست می آیند. بنابراین نقطه $-1+0j$ در منحنی نایکوئیست نقطه بحرانی به حساب می آید.

ما اگر سیستم حلقه باز $G(s)H(s)$ روی محور موهومی ریشه داشته باشد، از آنجا که می خواهیم تمام قطب‌های موجود در مسیر نایکوئیست پایدار باشند، ریشه هاي روی محور موهومی را با نیم دایره هایی به شعاع بسیار کوچک $1 \gg \varepsilon$ از مسیر نایکوئیست جدا می کنیم:



معیار پایداری نایکوئیست

اگر مسیر نایکوئیست تمام نیم صفحه راست را در بر داشته باشد، تعداد قطب‌های سمت راست حلقه بسته که برابر است با تعداد صفرهای معادله مشخصه $\Delta(s)=1+G(s)H(s)$ در نیم صفحه راست صفحه s با تعداد دور ساعتگردمنحنی فرکانسی $G(j\omega)\ H(j\omega)$ حوا نقطه بحرانی $-1+0j$ و تعداد قطب‌های سیستم حلقه باز در نیم صفحه راست صفحه s برابر است:

$$Z=N_R+P$$

که در آن:

Z : تعداد قطب‌های سمت راست حلقه بسته که برابر است با تعداد صفرهای معادله مشخصه $\Delta(s)$

$1+G(s)H(s)=0$ در نیم صفحه راست صفحه s

N_R : تعداد دور ساعتگرد منحنی فرکانسی $G(j\omega)\ H(j\omega)$ حول نقطه بحرانی $-1+0j$

P : تعداد قطب‌های سیستم حلقه باز در نیم صفحه راست صفحه s می‌باشد

سیستم حلقه بسته زمانی پایدار است که $Z=0$ باشد.

قواعد رسم منحنی نایکوئیست

برای رسم منحنی نایکوئیست که همان منحنی فرکانسی سیستم حلقه باز می باشد، مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱- ابتدا تابع تبدیل حلقه باز $G(j\omega)\ H(j\omega)$ را تشکیل می‌دهیم.

۲- با توجه به قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز مسیر نایکوئیست را رسم می‌نماییم.

۳- اندازه و زاویه تابع مختلط $G(j\omega)\ H(j\omega)$ را محاسبه می‌کنیم.

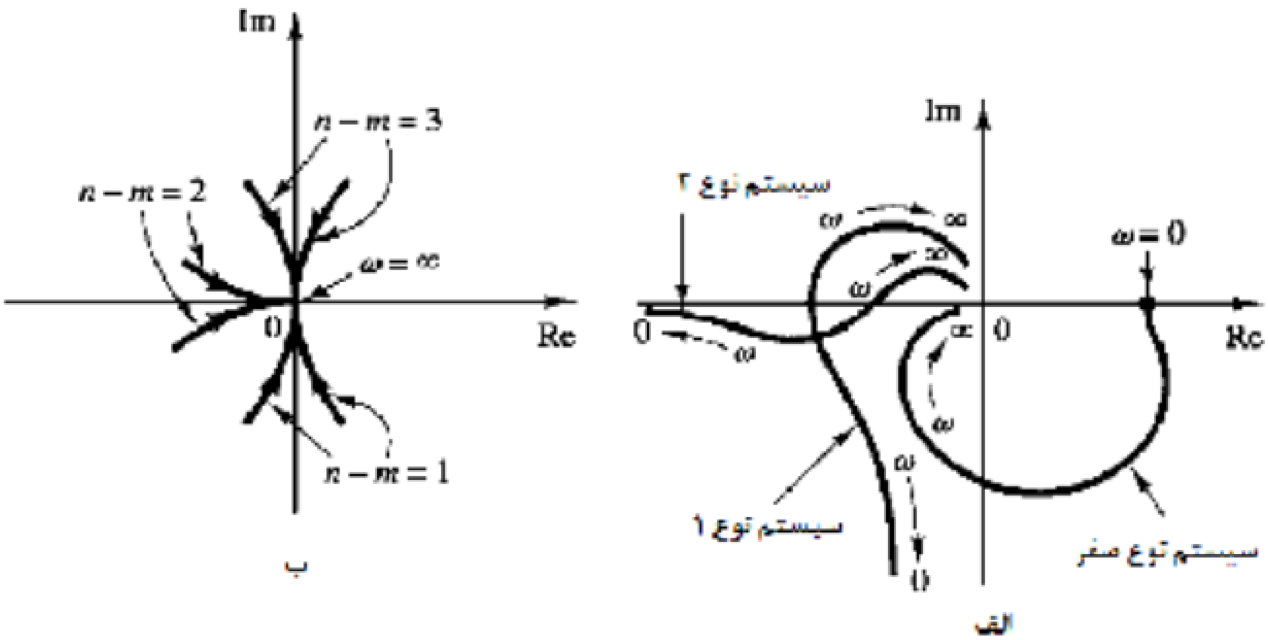
٤- قسمت حقیقی و موهومی تابع $G(j\omega)\ H(j\omega)$ را محاسبه می‌کنیم.

۵- نقطه برخورد با محور حقیقی از حل معادله $Im\{G(j\omega)\ H(j\omega)\} = 0$ بدست می‌آیند.

۶- نقاط برخورد با محور موهومی از حل معادله $Re\{G(j\omega)\ H(j\omega)\} = 0$ بدست می‌آیند.

۷- اندازه $G(j\omega)\ H(j\omega)$ را برای نقاط $\omega = 0^+$ ، $\omega = \infty$ و نقاط بدست آمده از مرحله ۵ محاسبه می‌کنیم.

۸- منحنی نایکوئیست را برای $\omega \in (0^+, \infty)$ با توجه به مرحله ۷ و شکل‌های زیر رسم می‌نماییم.



منحنی نایکوئیست در (الف) فرکانس پایین (ب) فرکانس بالا

۹- منحنی نایکوئیست نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۱۰- برای رسیدن $\omega = 0^-$ به $\omega = 0^+$ برای سیستم نوع N ، N نیم‌دایره در جهت ساعتگرد و به شعاع بی‌نهایت می‌کشیم.

پایان جلسه دهم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان