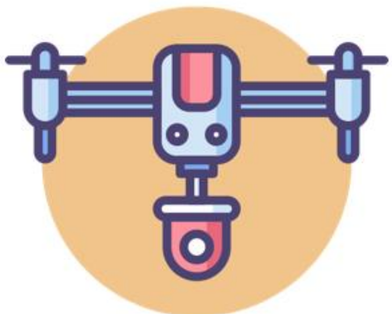
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه یازدهم

برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

دیاگرام قطبی $Polar\ plot$

فرض کنید $G(s)$ تابع تبدیل یک سیستم باشد برای محاسبه پاسخ فرکانسی بصورت زیر عمل می‌کنیم.

$$G(s=j\omega)=G(j\omega)=Re\{G(j\omega)\}+jIm\{G(j\omega)\}=u+iv=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

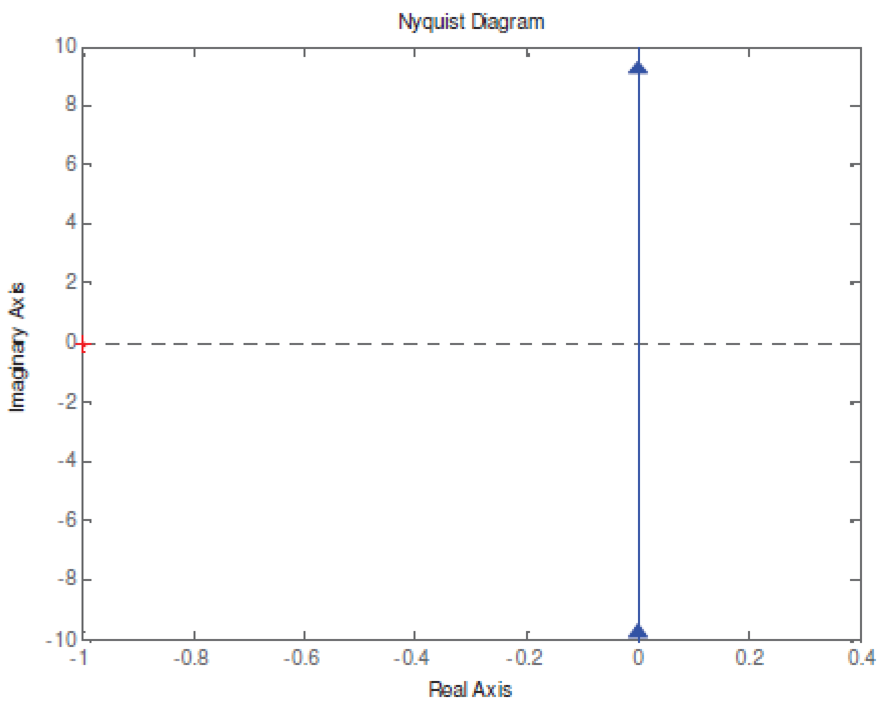
توابع $\{Re\{G(j\omega)\}, Im\{G(j\omega)\}\}$ and $|G(j\omega)|, \angle G(j\omega)\}$ توابعی از فرکانس ω هستند. با حذف متغیر ω بین آن دو، می‌توان پاسخ را به صورت یک منحنی در دو دستگاه که محور افقی آن $Re\{G\}$ و محور عمودی آن $Im\{G\}$ است. (اندازه بر حسب فاز) رسم نمود. به این منحنی نمودار قطبی می‌گویند و نقش مهمی در بررسی پایداری سیستم‌ها در حوزه فرکانس دارد.

مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم کنید.

$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)=S}$

$$G(s)=S\rightarrow G(j\omega)=j\omega\rightarrow\begin{cases}Re\{G\}=0\\Im\{G\}=\omega\end{cases}$$

نمودار قطبی جهت دار بوده و جهت تغییرات آن از $\omega=0$ ، $\omega=\infty$ است، برای ω های منفی، منحنی قرینه آن نسبت به محور حقیقی برای فرکانس‌های مثبت است.



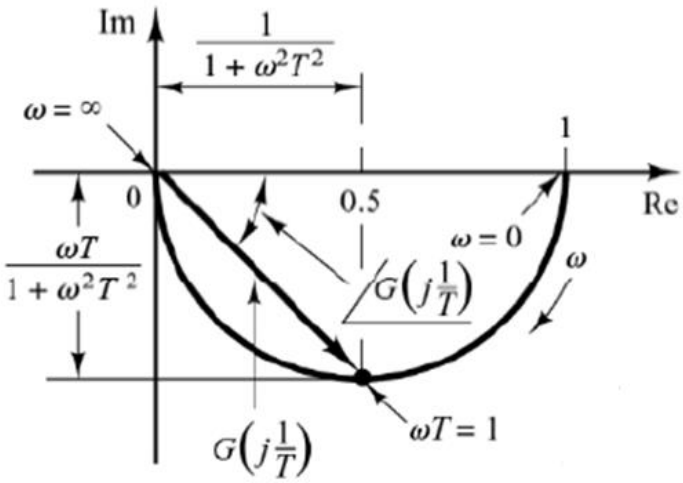
مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم کنید.

$$1)G(s) = \frac{1}{1+TS}$$

$$|a+jb| = \sqrt{(a+jb)(a-jb)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} \rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} \\ \angle G(j\omega) = 0 - tan^{-1}(\dfrac{\omega T}{1}) \end{cases}$$

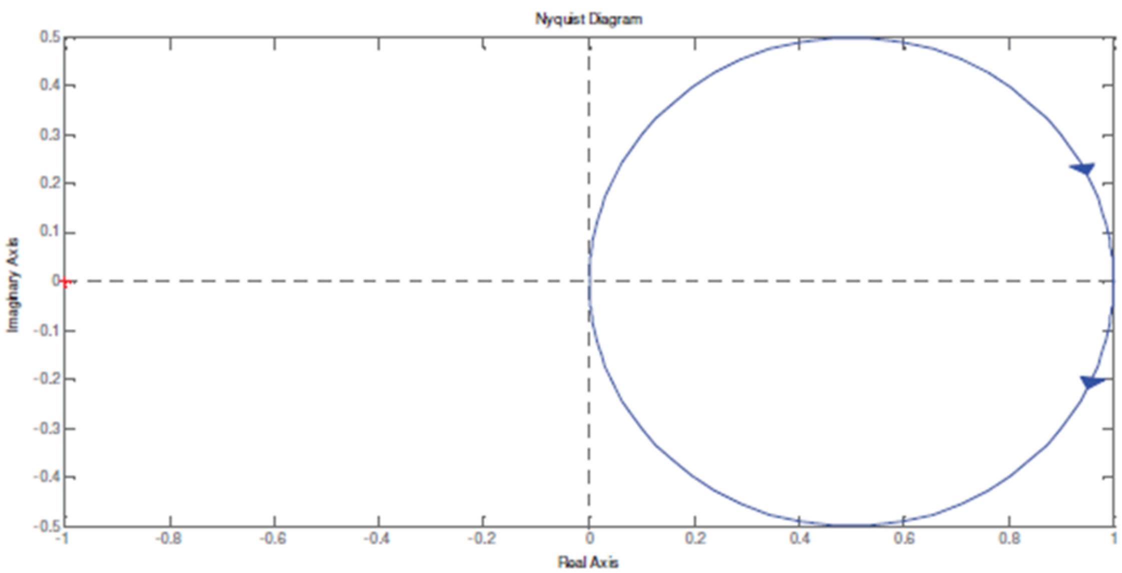
ω	0	$\frac{1}{T}$	∞
$\lvert G\rvert$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\angle G$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$



روش دوم:

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2T^2} + j\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2} = u + jv \quad \rightarrow \frac{v}{u} = -\omega T \rightarrow \omega T = -\frac{v}{u}$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{1+\omega^2T^2} \rightarrow u = \frac{1}{1+\dfrac{v^2}{u^2}} \rightarrow \frac{u^2+v^2}{u} = 1 \rightarrow u^2+v^2-u = 0 \rightarrow (u-\frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$



$$j = i = \sqrt{-1}$$

$$\Longrightarrow i^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

$$\Longrightarrow i^3 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -i$$

$$\Longrightarrow i^4 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 1$$

$$\Longrightarrow i^5 = i$$

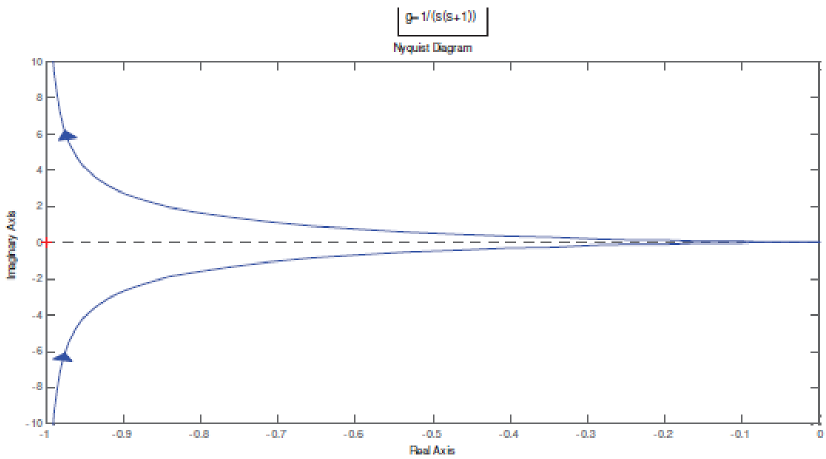
مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم کنید.

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{S(1+TS)}}$$

$$G(s) = \frac{K}{S(1+TS)} \mapsto G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)} = \frac{K}{-\omega^2 T + j\omega} \times \frac{-\omega^2 T - j\omega}{-\omega^2 T - j\omega}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-KT}{(1+\omega^2 T^2)} + j\frac{-K}{\omega(1+\omega^2 T^2)} = u + jv$$

ω	0	$\frac{1}{T}$	∞
Re	-KT	$-\frac{KT}{2}$	0
Im	$-\infty$	$-\frac{KT}{2}$	0



مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$1)\ \boldsymbol{G(s)\,H(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{S+1}}$$

سیستم حلقه باز فوق نوع صفر است و تعداد ریشه های ناپایدار آن صفر است بنابراین:

$$S+1=0 \Longrightarrow S=-1 \to P=0$$

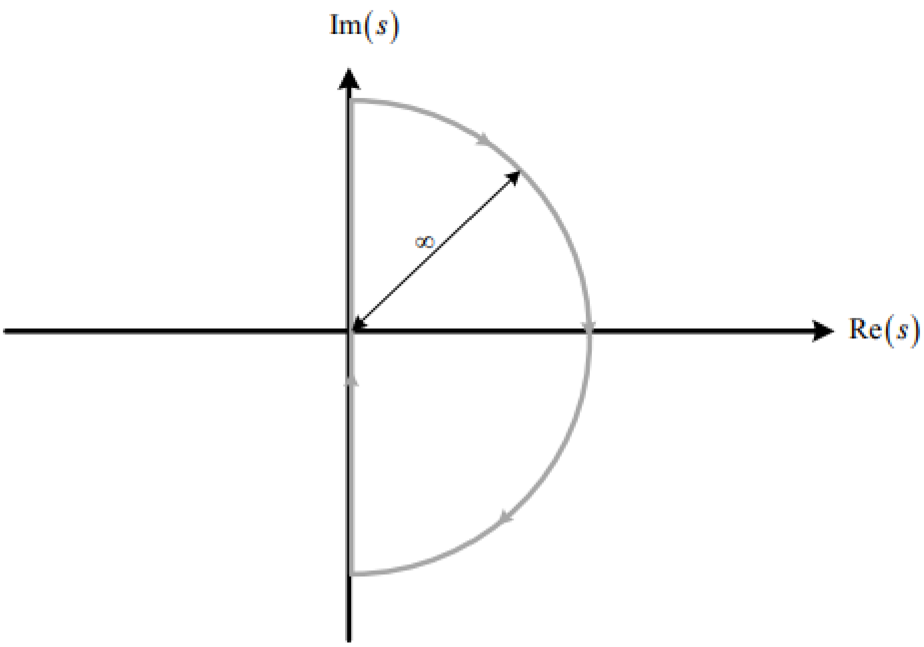
اکنون مراحل ۱۰ گانه فوق را به ترتیب انجام می دهیم:

$$|a+jb| = \sqrt{(a+jb)(a-jb)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega} \to \begin{cases} |GH(j\omega)| = \dfrac{1}{|1+j\omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \text{R}GH(j\omega) = 0-\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{1}\right) = -\tan^{-1}\omega \end{cases}$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\times\frac{1-j\omega}{1-j\omega}=\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}=\underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{\mathrm{Re}\{GH(j\omega)\}}+j\underbrace{\frac{-\omega}{1+\omega^2}}_{\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

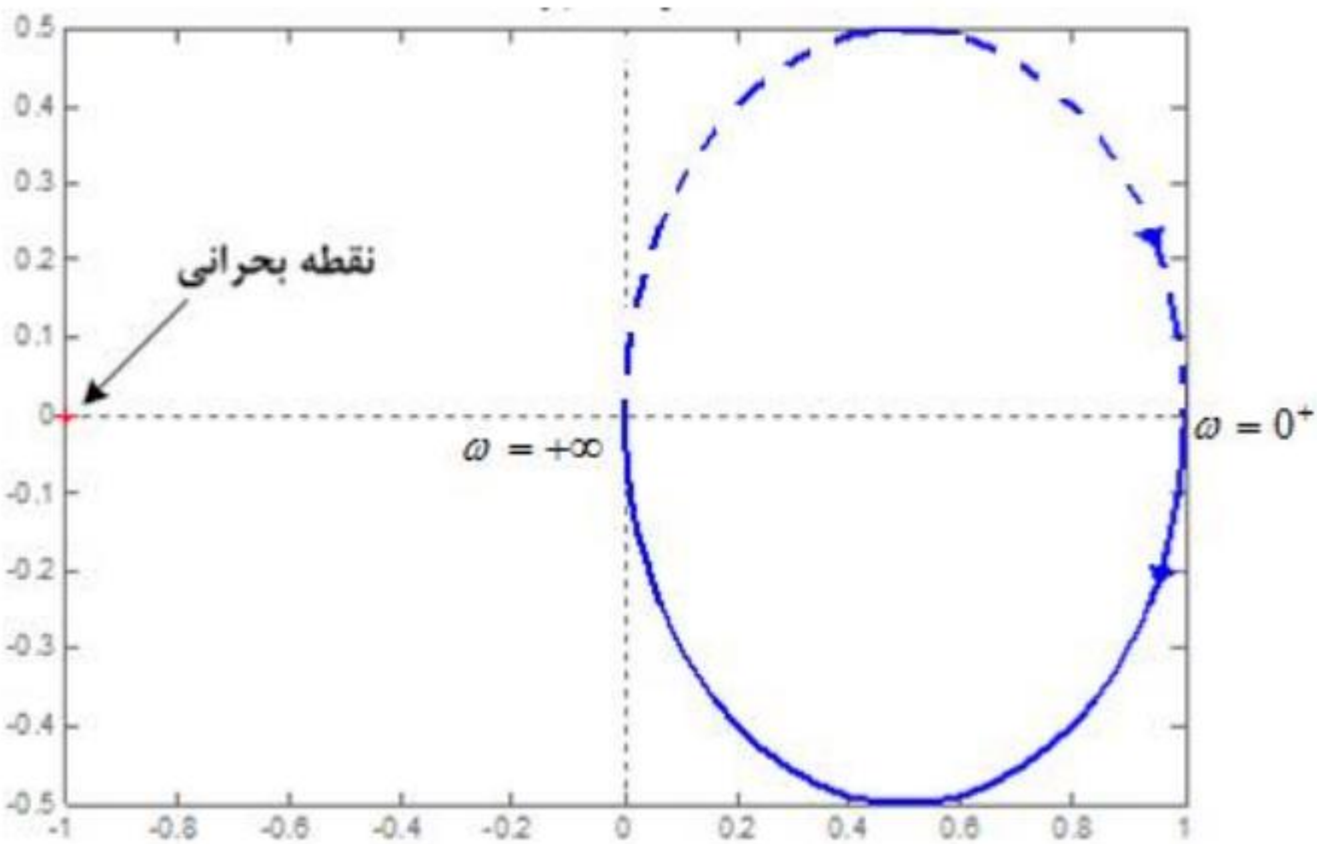
$$\to \mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}=0 \to \frac{-\omega}{1+\omega^2}=0 \to \omega=0$$



اکنون اندازه و زاویه $G(j\omega)\ H(j\omega)$ را برای نقاط $\omega = 0^+$ ، $\omega = \infty$ محاسبه می کنیم.

$$\omega = 0^+ \rightarrow \begin{cases} \left|GH\left(j0^+\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1 \\ \measuredangle GH\left(j0^+\right) = 0 - \tan^{-1}\left(\dfrac{0}{1}\right) = 0 \end{cases} \quad , \omega = +\infty \rightarrow \begin{cases} \left|GH\left(j\infty\right)\right| = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \measuredangle GH\left(j\infty\right) = 0 - \tan^{-1}\left(\infty\right) = -90^\circ \end{cases}$$

بنابراین نمودار نایکوئیست بصورت زیر خواهد بود:



با توجه به منحنی نایکوئیست داریم:

$$\begin{cases} P = 0 \\ N_R = 0 \end{cases} \rightarrow z = 0$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است.

مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$1)\ \boldsymbol{G(s)\,H(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{S(S+4)}}$$

سیستم حلقه باز فوق نوع یک است و تعداد ریشه های ناپایدار آن صفر است بنابراین

$$|a+jb| = \sqrt{(a+jb)(a-jb)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

برای اندازه هر کدام از j جدا محاسبه می‌کنیم.

$$S = j\omega \Longrightarrow |j\omega| = |(0+j\omega)| = \sqrt{(0+j\omega)(0-j\omega)} = \sqrt{0^2+\omega^2} = \omega$$

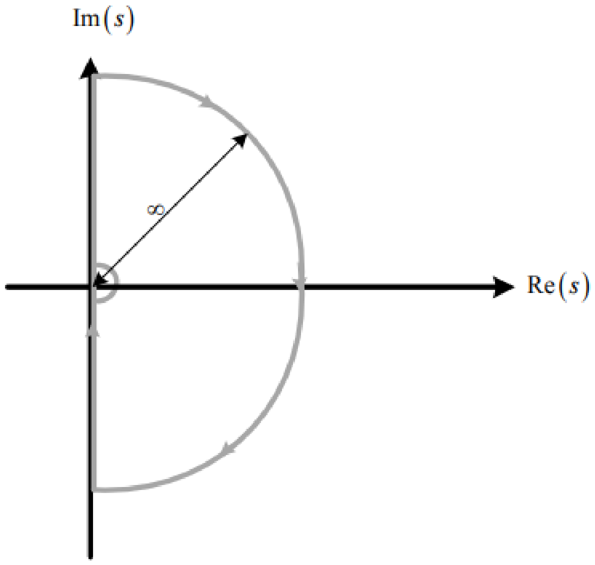
$$j\omega + 4 \Longrightarrow |j\omega+4| = |(4+j\omega)| = \sqrt{(4+j\omega)(4-j\omega)} = \sqrt{4^2+\omega^2}$$

$$s(s+4)=0 \to s=0,-4 \to P=0$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+4)} \to \begin{cases} |GH(j\omega)| = \dfrac{1}{|j\omega(j\omega+4)|} = \dfrac{1}{\omega\sqrt{16+\omega^2}} \\ \text{R}GH(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{4}\right) \end{cases}$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+4)} = \frac{1}{-\omega^2+4j\omega} \times \frac{-\omega^2-4j\omega}{-\omega^2-4j\omega} = \underbrace{\frac{-\omega^2}{(\omega^4+16\omega^2)}}_{\text{Re}\{GH(j\omega)\}} + j\underbrace{\frac{-4\omega}{(\omega^4+16\omega^2)}}_{\text{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

$$\to \text{Im}\{GH(j\omega)\} = 0 \to \frac{-4\omega}{(\omega^4+16\omega^2)} = 0 \to \omega = 0$$

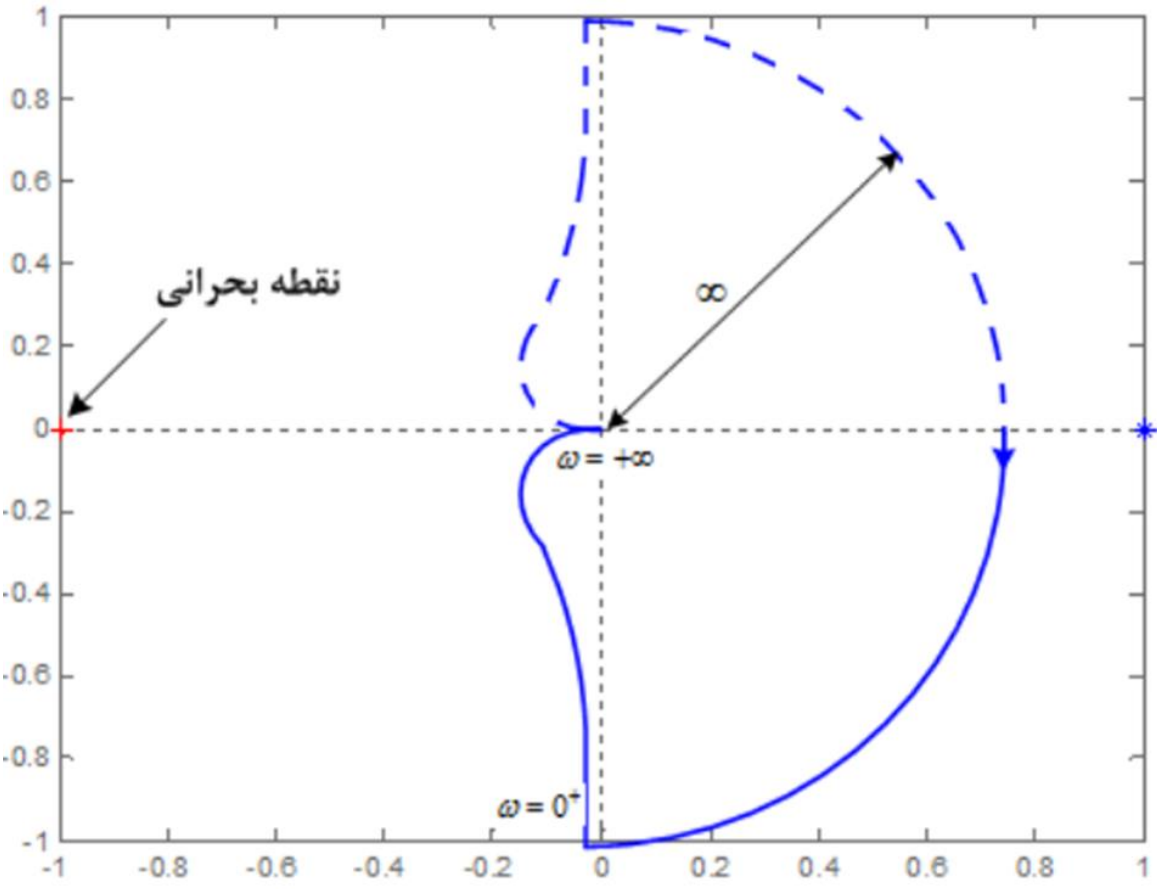


اکنون اندازه و زاویه $G(j\omega)\ H(j\omega)$ را برای نقاط $\omega = 0^+$ ، $\omega = \infty$ محاسبه می کنیم.

$$\omega = 0^+ \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\left|j0^+\left(j0^+ + 4\right)\right|} = \infty \\ \measuredangle GH(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} 0 = -90^\circ \end{cases}$$

$$\omega = +\infty \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\infty)\right| = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \measuredangle GH(j\infty) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1}(\infty) = -180^\circ \end{cases}$$

سیستم نوع یک می‌باشد. بنابراین برای رسیدن $\omega = 0^-$ به $\omega = 0^+$ ، یک نیم دایره در جهت عکس ساعتگرد و به شعاع بی‌نهایت می‌کشیم، بنابراین نمودار نایکوئیست به صورت زیر خواهد شد.



با توجه به منحنی نایکوئیست داریم:

$$\begin{cases} P = 0 \\ N_R = 0 \end{cases} \rightarrow z = 0$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است.

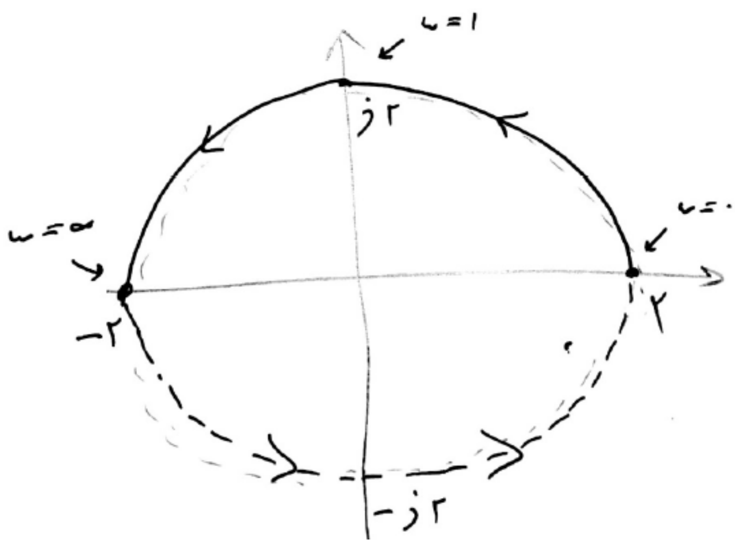
مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$1)\ G(s)\,H(s)=\frac{2(1+S)}{(1-S)}$$

$$G(s)=\frac{2(1+s)}{(1-s)}=2\,\frac{1+j\omega}{1-j\omega}$$

$$|G|=2\qquad \measuredangle G=\measuredangle(1+j\omega)-\measuredangle(1-j\omega)=2\tan^{-1}(\omega)$$

ω	0	1	∞
$\lvert G\rvert$	2	2	2
$\measuredangle G$	0	$\frac{\pi}{2}$	π

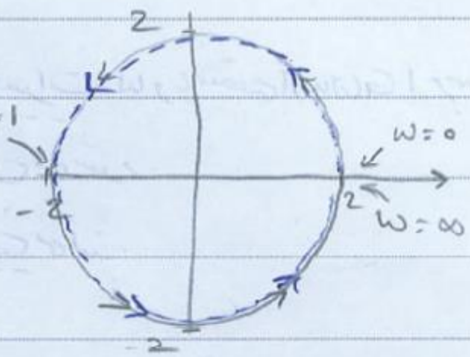


$$2)\ G(s)\,H(s)=\frac{2(1+S)^2}{(1-S)^2}$$

$$G(s)=2\,\frac{(s+1)^2}{(s-1)^2}\rightarrow G(j\omega)=\frac{2(1+j\omega)^2}{(-1+j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|=2\qquad \measuredangle G(j\omega)=2\tan^{-1}(\omega)-2\tan^{-1}(-\omega)=4\tan^{-1}(\omega)$$

ω	0	1	∞
$\lvert G\rvert$	2	2	2
$\measuredangle G$	0	π	2π



برای ω از ∞- تا ∞+ دو بار دایره ای به شعاع 2 بار درخلاف جهت عقربه ساعت پیموده می شود

فرم کلی نمودار نایکوئیست

اگر یک تابع تبدیل مینیمم فاز به فرم زیر داشته باشیم

$$open\ loop \Longrightarrow G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{S^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

درجه صورت m ، درجه مخرج n و نوع سیستم را N مشخص می‌کند.

سیستم نوع صفر $(N=0)$

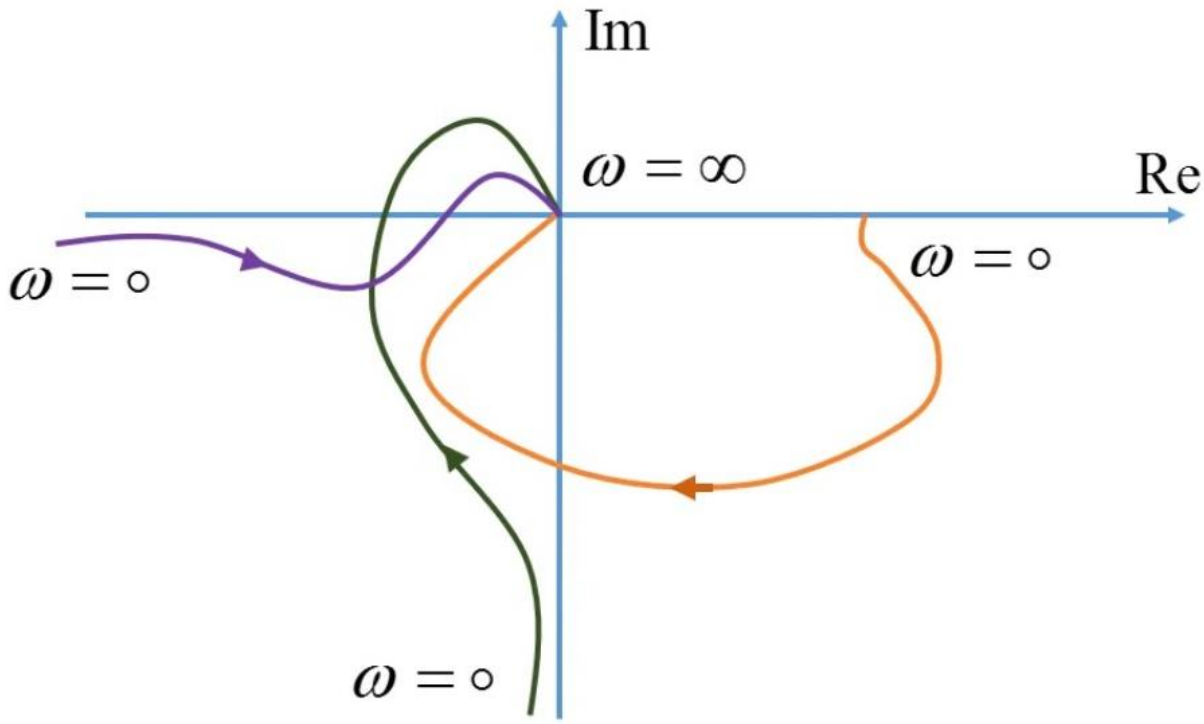
در این حالت به ازای فرکانس صفر نمودار نایکوئیست از روی محور حقیقی آغاز شده و به زاویه $-(n-m)90$ ختم می‌شود.

سیستم نوع صفر $(N=1)$

در این حالت به ازای فرکانس صفر اندازه بی‌نهایت و فاز -90 درجه است و در فرکانس بی‌نهایت به زاویه $-(n-m)90$ ختم می‌شود.

سیستم نوع صفر $(N=2)$

در این حالت به ازای فرکانس صفر اندازه بی‌نهایت و فاز -180 درجه است و در فرکانس بی‌نهایت به زاویه $-(n-m)90$ ختم می‌شود.



معیار پایداری نایکوئیست

معیار نایکوئیست روش نیمه ترسیمی در حوزه فرکانس است که به کمک آن می‌توان پایداری سیستم حلقه بسته را مورد بررسی قرار داد. به کمک معیار پایداری نایکوئیست می‌توان، پایداری مطلق سیستم حلقه بسته را بدون نیاز به تعیین عملی قطب‌های حلقه بسته از منحنی های نمودار قطبی حلقه باز تعیین کرد.

پایداری یک سیستم حلقه بسته، با تاخیر خالص را می‌توان بررسی کرد.

محل ریشه‌ها را مشخص می‌کند و لی به صورت دقیق نمی‌باشد.

تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی به صورت زیر است.

$$\frac{\boldsymbol{C(s)}}{\boldsymbol{R(s)}} = \frac{\boldsymbol{G(s)}}{\boldsymbol{1 + G(s)H(s)}}$$

که معادله مشخصه آن به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{1 + G(s)H(s) = 0}$$

قطب‌های سیستم حلقه بسته، صفرهای معادله مشخصه است و قطب‌های معادله مشخصه قطب‌های سیستم حلقه باز $\big(G(s)H(s)\big)$ می‌باشد.

مثال:

$$\boldsymbol{1)\ \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{2}{s(s+1)(s+2)}}}$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow \frac{s(s+1)(s+2)+2}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{2}{s(s+1)(s+2)}}} = \frac{\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{s(s+1)(s+2)}}}{\frac{s(s+1)(s+2)+2}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{\boldsymbol{2}}{s(s+1)(s+2)+2}$$

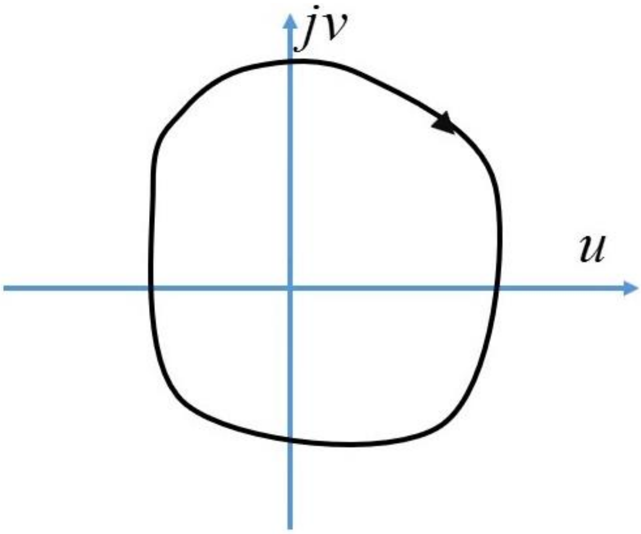
قسمت دوم هم که بدیهی است.

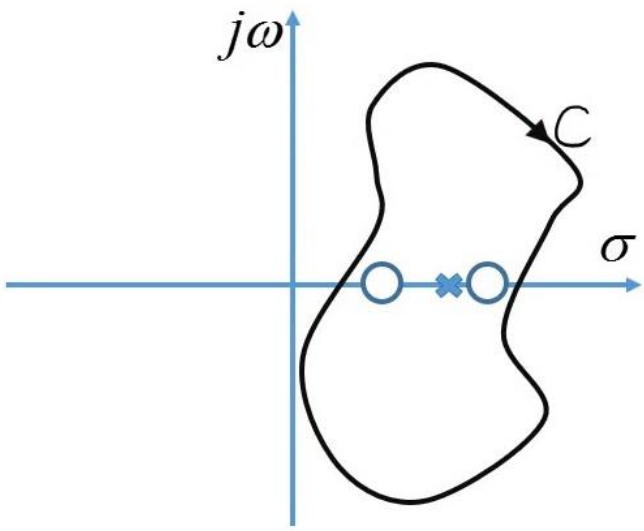
اصل آرگمان

اگر مسیری مانند c که ساعتگرد است، صفرها و قطب‌های $F(s)$ را در برگیرد، نگاشت آن تحت $F(s)$ مبداء مختصات جدید را به N بار دور می‌زند.

$$N = Z - P$$

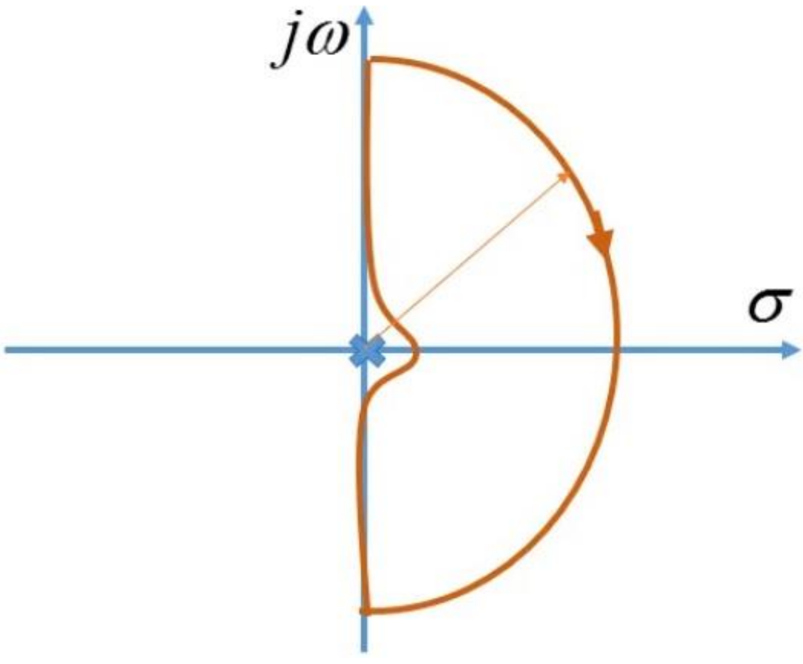
Z تعداد صفرها ، P تعداد قطب‌ها





مسیر نایکوئیست

با توجه به اینکه هدف پیدا کردن قطب‌های سمت راست صفحه s است، مسیر نایکوئیست را نیم دایره‌ای با شعاع بی‌نهایت در سمت راست صفحه s در نظر می‌گیریم. اگر روی محور موهومی قطبی وجود داشت باید آن را دور بزنیم.



اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ داری k قطب در سمت راست محور موهومی داشته باشد، برای پایدار بودن باید نقطه -1 را k دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور بزنند.

این معیار را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$Z = N + P$$

Z تعداد قطب‌های سمت راست حلقه بسته

N تعداد دورهای دور -1

اگر در جهت عقربه های ساعت باشد (N مثبت)، اگر در خلاف جهت عقربه های ساعت باشد (N منفی)

P تعداد قطب‌های حلقه باز سمت راست.

ارتباط نوع سیستم با مقدار چرخش مسیر حلقه بسته

اگر سیستم نوع N باشد منحنی نایکوئیست با شعاع بی‌نهایت به مقدار $N \times 180$ مبداء را دور خواهد زد.

با توجه به این نکته اگر سیستمی نوع صفر باشد، منحنی نایکوئیست شعاع بی‌نهایت نخواهد داشت.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید، با استفاده از معیار نایکوئیست مقدار k را برای پایداری حلقه بسته سیستم تعیین کنید.

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{S^2(s+2)(s+3)}}$$

$$Z = N_R + P$$

P : تعداد قطب‌های سیستم حلقه باز در نیم صفحه راست صفحه s می‌باشد، پس $P = 0$

Z : تعداد قطب‌های سمت راست حلقه بسته که برابر است با تعداد صفرهای معادله مشخصه $\Delta(s)$

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s)$$

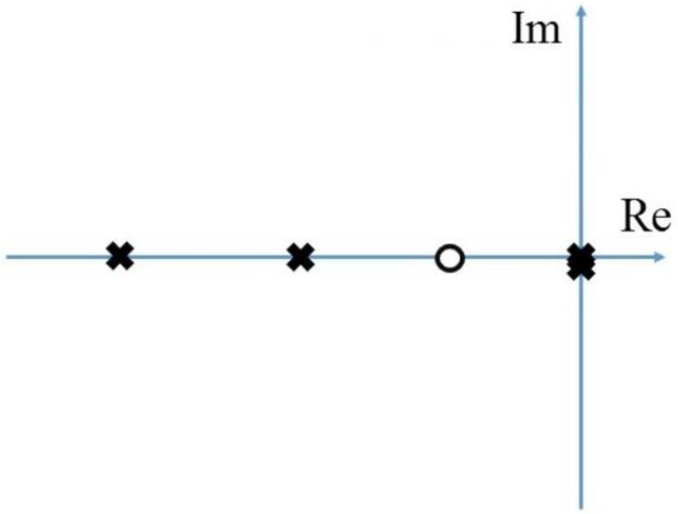
$$1 + G(s)H(s) \Rightarrow 1 + \frac{K(s+1)}{S^2(s+2)(s+3)} = \frac{S^2(s+2)(s+3) + K(s+1)}{S^2(s+2)(s+3)}$$

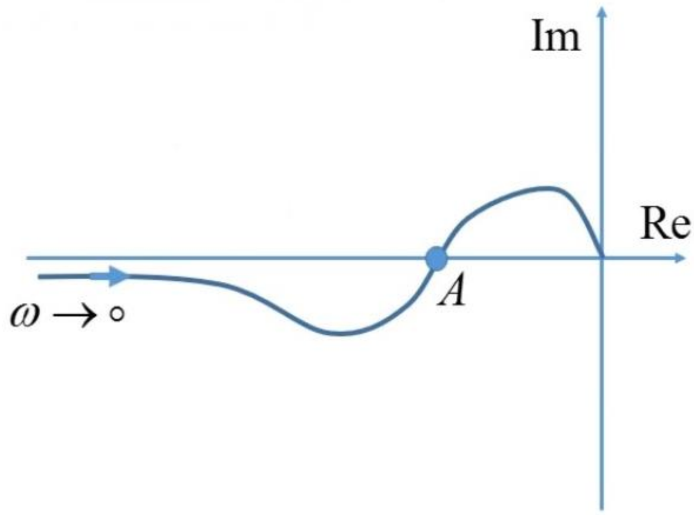
$$Z = 0$$

پس باید N_R یا تعداد دورهای دور -1 باید صفر باشد.

$$N_R = 0$$

نمودار صفر وقطب تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر است.





برای بدست آوردن محل برخورد با محور حقیقی، قسمت موهومی را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$GH(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{j\omega^2(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{K(j\omega+1)}{-\omega^2(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{-\omega^2(j\omega+2)(j\omega+3)} \times \frac{(j\omega-2)(j\omega-3)}{(j\omega-2)(j\omega-3)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{kj^3\omega^3 - 4kj^2\omega^2 + kj\omega + 6k}{-\omega^2(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$$

$$Re\big(GH(j\omega)\big) = \frac{4k\omega^2 + 6k}{-\omega^2(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$$

برای قسمت موهومی دقت شود $\Rightarrow \dfrac{k(-j)\omega^3 + k(j)\omega}{-\omega^2(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$

$$Im\big(GH(j\omega)\big) \Rightarrow \frac{-k\omega^3 + k\omega}{-\omega^2(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = 0 \to \omega = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

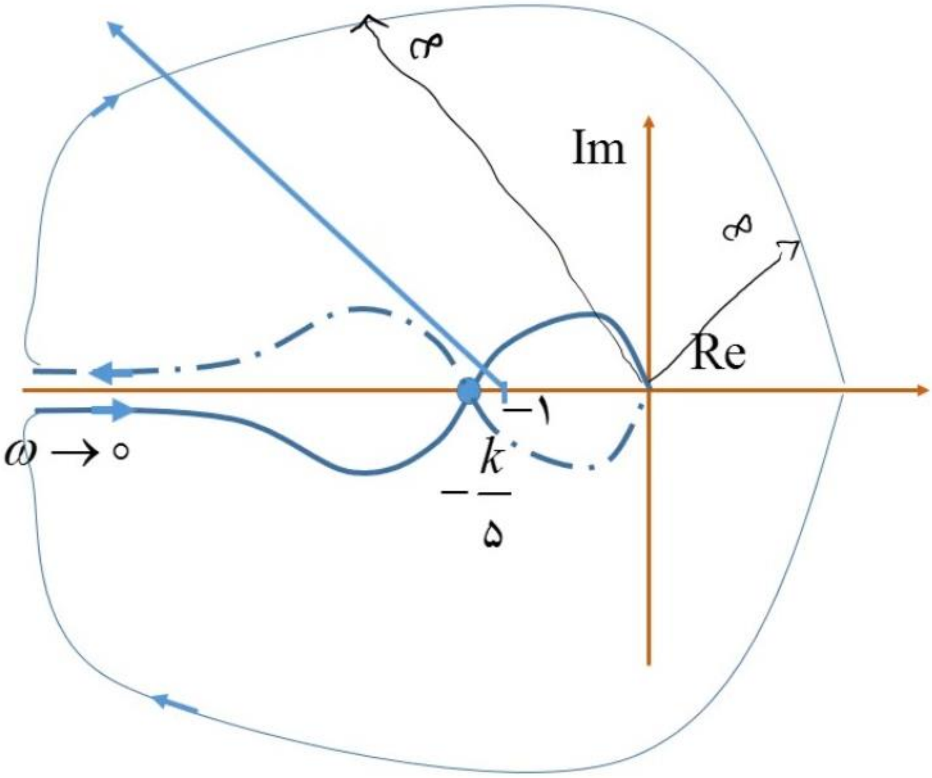
$$\omega = 1 \Rightarrow Re\big(GH(j\omega)\big) = \frac{4k\omega^2 + 6k}{-\omega^2(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = \frac{-k}{5}$$

$$Z = N_R + P$$

$$P = 0 \quad , \quad Z = 0$$

برای آنکه سیستم پایدار باشد، $N_R = 0$ (منفی یک را دور نزند)باید محل برخورد نایکوئیست با محور حقیقی بزرگتر از -1 باشد، پس

$$\frac{-k}{5} > -1 \Rightarrow k < 5$$



Radian Degree	0 0°	$\frac{\pi}{12}$ 15°	$\frac{\pi}{8}$ 22.5°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{5\pi}{12}$ 75°	$\frac{\pi}{2}$ 90°
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0

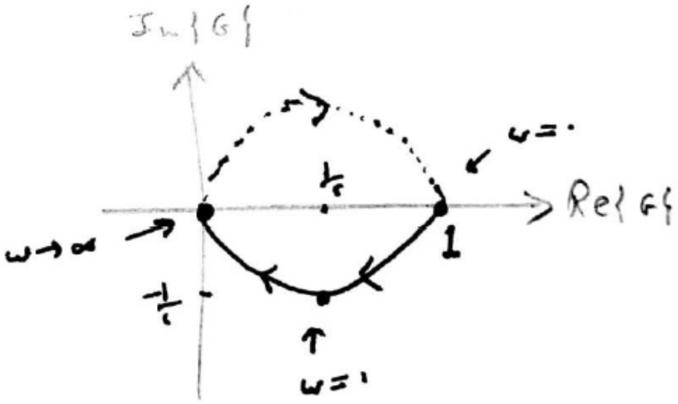
$$\theta = \tan^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan(\theta)$$

مثال: دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$1)\ G(s)\,H(s)=\frac{1}{S+1}$$

$$G(s)=\frac{1}{s+1}=\frac{1}{1+j\omega}\times\frac{1-j\omega}{1-j\omega}=\frac{1}{1+\omega^2}+j\frac{-\omega}{1+\omega^2}$$

ω	0	1	∞
$Re\{G\}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$Im\{G\}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

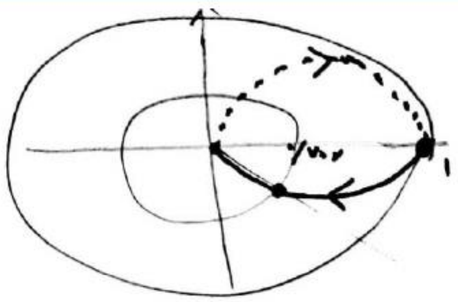


$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

$$|G|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\measuredangle G=-\tan^{-1}(\omega)$$

ω	0	1	∞
$\lvert G\rvert$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\measuredangle G$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$



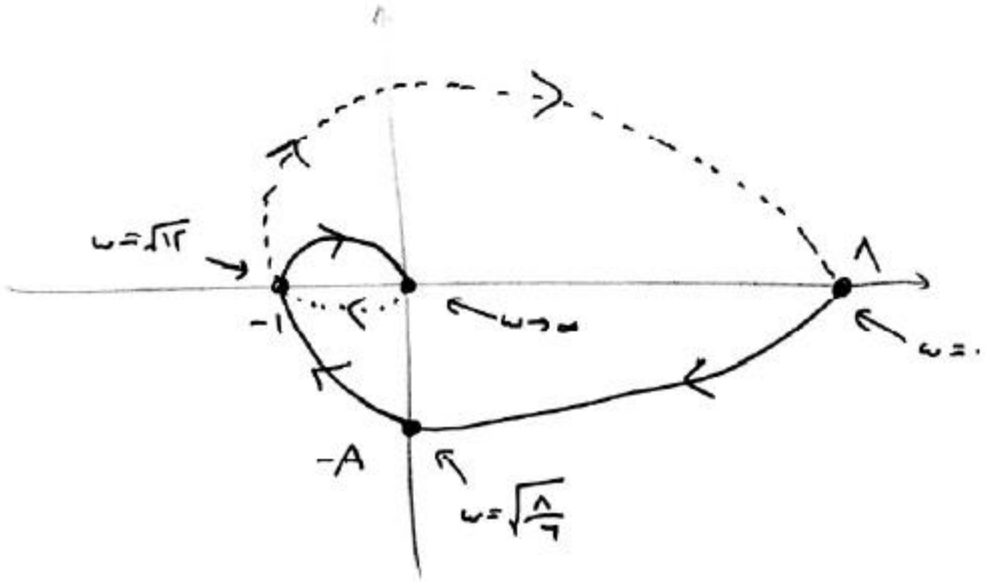
$$2)\ G(s)\,H(s)=\frac{64}{(S+2)^3}$$

$$G(s)=\frac{64}{(s+2)^3}=\frac{64}{s^3+6s^2+12s+8}$$

$$G(j\omega)=\frac{64}{(8-6\omega^2)+j\omega(12-\omega^2)}\times\frac{(8-6\omega^2)-j\omega(12-\omega^2)}{(8-6\omega^2)-j\omega(12-\omega^2)}$$

$$G(j\omega)=\frac{6K(8-6\omega^2)}{(8-6\omega^2)^2+\omega^2(12-\omega^2)^2}+j\,\frac{-6K\omega(12-\omega^2)}{(8-6\omega^2)^2+\omega^2(12-\omega^2)^2}$$

ω	0		$\sqrt{\frac{8}{6}}$		$\sqrt{12}$		∞
$Re\{G\}$	8	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$Im\{G\}$	0	$-$	$\frac{-6K}{\sqrt{\frac{8}{6}}(12-\frac{8}{6})} = -A$	$-$	0	$+$	0



منابع:

۱- جزوه استاد مهدی سیاهی

۲- جزوه استاد راحیل زرگری

۳- سایت فرادرس

پایان جلسه یازدهم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان