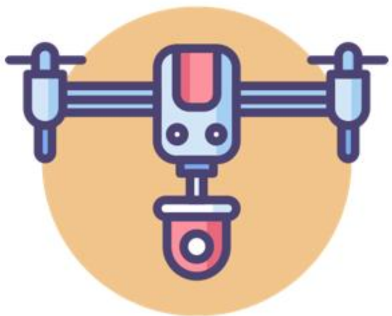
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه دوم

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

تبدیل لاپلاس

می توان گفت پل ارتباطی بین حوزه زمان به فرکانس است.

تبدیل لاپلاس یک ابزار قدرتمند ریاضیست که در حل بسیاری از مسائل کاربردی رشته مهندسی کنترل مورد استفاده قرار می گیرد.

تبدیل لاپلاس بر روی توابعی تعریف می گردد که در دامنه $t \geq 0$ تعریف شده باشند. اگر تابعی این شرط را داشته باشد، تبدیل لاپلاس یک سیگنال بصورت رابطه زیر خواهد بود.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

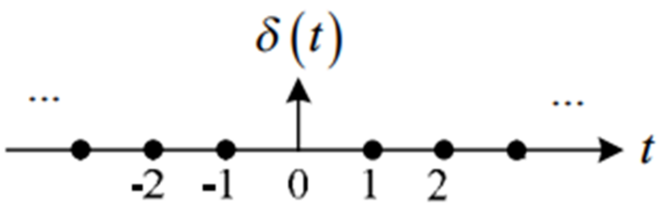
که در آن $\mathcal{L}\{\ \}$ عملگر تبدیل لاپلاس، $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و s یک متغیر مختلط به فرم $s = \alpha + j\omega$ می‌باشد. با چند مثال به یاد آوری مبحث تبدیل لاپلاس می‌پردازیم:

یادآوری

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{at}\, dt = \frac{1}{a}[e^{at_1} - e^{at_0}]$$

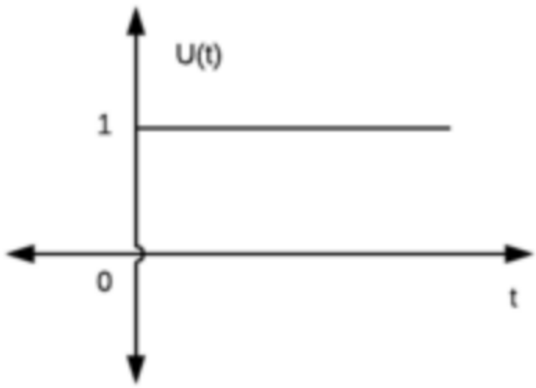
تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{\delta(t)} = \begin{cases} \text{نامعلوم } (\infty) & \boldsymbol{t = 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t \neq 0} \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt \xRightarrow{t_0=0} \int_{0}^{+\infty} \delta(t)\, e^{0} dt = \int_{0}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$2)\ \boldsymbol{u(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{t \geq 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t < 0} \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0}^{+\infty} u(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} 1 \times e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{-1}{s}(e^{-\infty} - e^{0})$$

$$= \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

$$3)\boldsymbol{f(t) = te^{-3t}u(t)}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0}^{+\infty} (te^{-3t}u(t))\, e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-3t} \times e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-(s+3)t}\, dt$$

$$= \left(\frac{-1}{(s+3)} te^{-(s+3)t} - \frac{1}{(s+3)^2} e^{-(s+3)t} \right) \Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$= \left(0 - \frac{1}{(s+3)^2} \left(e^{-\infty} - e^{0} \right) \right) \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{(s+3)^2}$$

مشتق	انتگرال
t	$e^{-(s+3)t}$
1 $-$	$\frac{-1}{(s+3)} e^{-(s+3)t}$
0	$\frac{1}{(s+3)^2} e^{-(s+3)t}$

جدول تبدیل لاپلاس

	$x(t)$	$X(s)$
۱	$\delta(t)$	1
۲	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
۳	$t.u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
۴	$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۵	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
۶	$t^n.e^{-at}.u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
۷	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
۸	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
۹	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
۱۰	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

خواص تبدیل لاپلاس

$X(s)$	$x(t)$	ردیف
$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	۱
$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	$f(\alpha t)$	۲
$e^{-t_0 s}F(s)$	$f(t-t_0)$	۳
$F(s-s_0)$	$e^{s_0 t}f(t)$	۴
$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{dz^n}$	$t^k.f(t)$	۵
$s^nF(s)-s^{n-1}\frac{df(0)}{dt}-s^{n-2}\frac{d^2f(0)}{dt^2}-\cdots-s^{n-1}\frac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}}$	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	۶
$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^\infty f(t)dt$	۷
$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t)*f_2(t)$	۸
$\frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}F_1(p)F_2(s-p)dp$	$f_1(t)f_2(t)$	۹

خواص تبدیل لاپلاس			زوج های تبدیل لاپلاس	
خاصیت	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
خطی بودن	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$\delta(t)$	1
تغییر مقیاس	$f(at)$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
انتقال زمان	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
انتقال فرکانس	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
مشتقگیری در زمان	$\frac{df}{dt}$	$SF(s) - f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{df^2}{d^2 t}$	$s^2 f(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{df^n}{d^n t}$	$s^n f(s) - s^{n-1} f(0^-) - \ldots\ldots f^{(n-1)}(0^-)$	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
انتگرالگیری در زمان	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
مشتقگیری در فرکانس	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$\sin(wt+\theta)$	$\frac{s\sin\theta + w\cos\theta}{s^2+w^2}$
انتگرالگیری در فرکانس	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty f(s)d(s)$	$\cos(wt+\theta)$	$\frac{s\cos\theta - w\sin\theta}{s^2+w^2}$
تناوب زمانی	$f(t) = f(t+T)$	$\frac{F_1 s}{1-e^{-Ts}}$	$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
قضیه مقدار اولیه	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
قضیه مقدار نهایی	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$		
کانولوشن	$f(t) \times f2(t)$	$F_1(s).F_2(s)$		

خواص تبدیل لاپلاس

معادلات دیفرانسیل مرتبه n خطی و نا متغییر با زمان (LTI) با شرط داشتن مقادیر اولیه

مدل کلی

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = g(t)$$

تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n y}{dt^n}\right] = S^n Y(s) - S^{n-1}y(0) - S^{n-2}y'(0) - \cdots - S^0 y^{n-1}(0)$$

$$\mathcal{L}[y''(\mathrm{t})] = S^2 Y(s) - Sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[y'(\mathrm{t})] = SY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{y(t)}] = Y(s)$$

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید:

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{f(t) = 3e^{3t}u(t-2)}$$

$$\mathcal{L}\{3e^{3t}u(t-2)\} = 3\mathcal{L}\{e^{3t}u(t-2)\}$$

$f(t) \rightarrow f(t-t_0)$ پس $e^{(t-t_0)} \Longrightarrow u(t-t_0)$

$$3\mathcal{L}\left\{e^{3(t-2+2)}u(t-2)\right\} = 3\mathcal{L}\left\{e^6 e^{3(t-2)}u(t-2)\right\}$$

$$3e^6\mathcal{L}\left\{e^{3(t-2)}u(t-2)\right\}$$

$$F(s) \rightarrow \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} \Longrightarrow e^{-t_0 s}F(s)$$

$$3e^6\mathcal{L}\left\{e^{3(t-2)}u(t-2)\right\} \Longrightarrow 3e^6\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = 3e^6\left(\frac{e^{-2s}}{s-3}\right)$$

$$\mathbf{2)}\boldsymbol{f(t) = t^2 sin(2t)}$$

$$\mathcal{L}\{sin(\omega_0 t)u(t)\} \Longrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} \Longrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$sin(2t) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} = f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

$$\mathcal{L}\{t^2 sin(2t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{-4(s^2+4)^2 - 2(s^2+4)(2s)(-4s)}{(s^2+4)^4} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

قضایای تبدیل لاپلاس

دو قضیه اصلی تبدیل لاپلاس عبارتند از:

- قضیه مقدار اولیه

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

- قضیه مقدار نهایی

$$\lim_{s\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

مثال: اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{s^2+1}}{\boldsymbol{s^3+s+5}}$$

مقدار $f(0)$ و $\lim_{s\to\infty} f(t)$ را محاسبه مایید:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s) = \lim_{s\to\infty} s \times \left(\frac{s^2+1}{(s^3+s+5)}\right) \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s^3+s}{(s^3+s+5)}\right) = 1$$

$$\lim_{s\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s) = \lim_{s\to 0} s \times \left(\frac{s^2+1}{(s^3+s+5)}\right) \lim_{s\to 0}\left(\frac{s^3+s}{(s^3+s+5)}\right) = 0$$

عکس تبدیل لاپلاس

برای محاسبه تابع زمانی از روی تابع حوزه لاپلاس باید از عکس تبدیل لاپلاس استفاده نمود:

$$\color{red}{\mathcal{L}^{-1}\{}F(s)\color{red}{\}} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{0}^{+\infty} F(s)e^{st}ds \qquad\qquad t \geq 0$$

از آنجایی که رابطه انتگرالی عکس تبدیل لاپلاس، حل این گونه مسائل را پیچیده می کند، برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس تا جای ممکن از جدول تبدیل لاپلاس که در بالا آمده است استفاده می کنیم.

ما در جدول تبدیل لاپلاس می بینیم همه‌ی توابع حوزه لاپلاس فرم کلی کسری دارند، بنابراین برای استفاده از آن ابتدا باید تابع حوزه لاپلاس را به کسرهای جزئی تفکیک کنیم:

تفکیک (تجزیه)کسر به کسرهای جزئی

$$\boldsymbol{X(s)} = \frac{\text{تفکیک به کسرهای جزئی}}{\text{کسرهایی که تبدیل معکوس لاپلاس آنها را می‌دانیم}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\quad}{s} + \frac{\quad}{s+a} + \frac{\quad}{(s+a)^2} + \frac{\quad}{s^2+b^2} + \frac{\quad}{(s^2+b^2)^2} + \cdots$$

حالت اول: ریشه ها حقیقی ساده

$$\boldsymbol{X(s)} = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{s}+\mathbf{1})(\boldsymbol{s}+\mathbf{2})(\boldsymbol{s}+\mathbf{4})} \rightarrow \text{تفکیک} \rightarrow \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+4}$$

برای محاسبه، عامل کسر جزئی را از کسر اصلی حذف می‌کنیم و ریشه اش را در باقیمانده کسر اصلی قرار میدهیم، به این صورت مقادیر k_1،k_2،k_3 بدست می آید.

$$k_1 \rightarrow s+1=0 \rightarrow s=-1 \rightarrow k_1 = \frac{1}{(s+2)(S+4)} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}$$

$$k_2 \rightarrow s+2=0 \rightarrow s=-2 \rightarrow k_2 = \frac{1}{(s+1)(S+4)} \rightarrow k_2 = \frac{-1}{2}$$

$$k_3 \rightarrow s+4=0 \rightarrow s=-4 \rightarrow k_3 = \frac{1}{(s+1)(S+2)} \rightarrow k_3 = \frac{1}{6}$$

مثال:معادله دیفرانسیل زیر را برای $y(t)$ با فرض اینکه تمام شرایط اولیه صفر باشند با استفاده تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2}+12\frac{dy}{dt}+32y=32u(t)\rightarrow\begin{cases}y(0)=0\\y'(0)=0\end{cases}}$$

$$\mathcal{L}[y''(\mathrm{t})]=S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)=S^2Y(s)-s\times 0-0=S^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}[y'(\mathrm{t})]=SY(s)-y(0)=12S\,Y(s)-0=12S\,Y(s)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{y(t)}]=Y(s)=32Y(s)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{u(t)}]=\frac{1}{s}\Rightarrow\frac{32}{s}$$

$$S^2Y(s)+12S\,Y(s)+32Y(s)=\frac{32}{S}\Rightarrow Y(s)=\frac{32}{S(S^2+12S+32)}=\frac{32}{S(S+4)(S+8)}$$

$$\text{تفکیک}\rightarrow\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+4}+\frac{k_3}{s+8}$$

$$k_1\rightarrow s=0\rightarrow k_1=\frac{32}{(S+4)(S+8)}\rightarrow k_1=1$$

$$k_2\rightarrow s+4=0\rightarrow s=-4\rightarrow k_2=\frac{32}{S(S+8)}\rightarrow k_2=-2$$

$$k_3\rightarrow s+8=0\rightarrow s=-8\rightarrow k_3=\frac{32}{S(S+4)}\rightarrow k_3=-1$$

$$\frac{32}{S(S+4)(S+8)}=\frac{1}{s}+\frac{-2}{s+4}+\frac{-1}{s+8}$$

$$y(t)=(1-2e^{-4t}-e^{-8t})u(t)\quad t>0$$

حالت دوم : ریشه های حقیقی مضاعف

روش اول

$$\boldsymbol{F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}}=\frac{\boldsymbol{N(s)}}{(s+p_1)^r(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{(s+p_1)^r}+\frac{k_2}{(s+p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_r}{(s+p_1)}+\frac{k_{r+1}}{(s+p_2)}+\cdots+\frac{k_n}{(s+p_n)}$$

قدم اول: برای تفکیک کردن، یک ریشه مرتبه r داریم پس این ریشه r کسر متفاوت تولید می‌کند.

ضرایب عوامل ساده حقیقی را با روش قبلی پیدا می‌کنیم.

قدم دوم: اگر $(i = 1,2, \dots, r)$ برای مشخص کردن هر کسر مضاعف در نظر بگیریم، ضریب آن کسر برابر است با:

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s \to -p_1} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left((s+p_1)^r F(s) \right) \qquad , \qquad i = 1,2, \dots, \mathrm{r}; \quad 0! = 1$$

مثال:

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{(s+1)^2 (s+2)}}$$

قدم اول: برای تفکیک کردن، یک ریشه مرتبه ۲ داریم پس این ریشه دو کسر متفاوت تولید می‌کند.

$$\to \text{تفکیک} \frac{k_1}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$$

$$k_3 \to s+2 = 0 \to s = -2 \to k_3 = \frac{1}{(S+1)^2} \to k_3 = 1$$

قدم دوم: اگر $(i = 1,2, \dots, r)$ برای مشخص کردن هر کسر مضاعف در نظر بگیریم، ضریب آن کسر برابر است با:

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s \to -p_1} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left((s+p_1)^r F(s) \right)$$

$$k_1 = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{s \to -p_1} \frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}} \left((s+1)^2 \times \frac{1}{(s+1)^2 (s+2)} \right) = \lim_{s \to -1} \frac{1}{(s+2)} = 1$$

$$k_2 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to -p_1} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left((s+1)^2 \times \frac{1}{(s+1)^2 (s+2)} \right) = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s+2)}$$

$$\Longrightarrow k_2 = \lim_{s \to -1} \frac{-1}{(S+2)^2} = -1$$

روش دوم :

$$\boldsymbol{F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}}$$

ضرایب عواملی که در F(s) است به روش ریشه حقیقی ساده حساب می‌کنیم.

$$\rightarrow \text{تفکیک} \frac{k_1}{(s+1)^2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1 \rightarrow s+1=0 \rightarrow s=-1 \rightarrow k_1=\frac{1}{s+2} \rightarrow k_1=1$$

$$k_3 \rightarrow s+2=0 \rightarrow s=-2 \rightarrow k_3=\frac{1}{(S+1)^2} \rightarrow k_3=1$$

ریشه مربوط به k_2 چند درجه کمتر نسبت به $(S+1)^2$ است

یک درجه، پس از F(s) بدون $(S+1)^2$ یک بار مشتق بکیرید و در $\frac{1}{1!}$ ضرب کن.

$$k_2 \rightarrow F(1)=\left[\frac{1}{(s+2)}\right]'=\frac{-1}{(S+2)^2}$$

$$k_2 \rightarrow s+1=0 \rightarrow s=-1 \rightarrow k_2=\frac{-1}{(S+2)^2} \rightarrow k_2=-1$$

یا عدد گذاری :

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

عددی قرار می‌دهیم که بی‌نهایت نشود

$$s=-3 \rightarrow \frac{1}{(-3+1)^2(-3+2)}=\frac{-1}{4}$$

$$s=-3 \rightarrow \frac{1}{(s+1)^2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{1}{s+2}=\frac{1}{4}-\frac{k_2}{2}-1$$

$$\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{k_2}{2}-1 \rightarrow k_2=-1$$

حالت سوم: ریشه ها موهومی

$$\boldsymbol{F(s)=\frac{5}{(s+1)(s^2+4)}}$$

در صورت کسر جزئی مربوط به عامل موهومی، چند جمله ای از یک درجه کمتر قرار می‌دهیم.

$$\rightarrow \text{تفکیک} \frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2 s+k_3}{(s^2+4)}$$

قدم اول: ضرایب عوامل ساده حقیقی را با روش فبلی پیدا می‌کنیم.

$$k_1 \rightarrow s+1=0 \rightarrow s=-1 \rightarrow k_1=\frac{5}{(s^2+4)} \rightarrow k_1=1$$

قدم دوم : صورت را در S ضرب کرده و S به سمت بی نهایت میل میدهیم. (محاسبه k_2)

$$\frac{5}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{1}{(s+1)}+\frac{k_2 s+k_3}{(s^2+4)}$$

پس:

$$\frac{s5}{(s+1)(s^2+4)}\Big|_{s\to\infty}=\left[\frac{s1}{(s+1)}+\frac{s(k_2 s+k_3)}{(s^2+4)}\right]\Big|_{s\to\infty}$$

$$k_2 \rightarrow s=\infty \rightarrow 0=1+k_2 \rightarrow k_2=-1$$

قدم سوم : S به سمت صفر میل می‌کند. (محاسبه k_3)

$$\frac{5}{(s+1)(s^2+4)}\Big|_{s\to 0}=\left[\frac{1}{(s+1)}+\frac{(k_2 s+k_3)}{(s^2+4)}\right]\Big|_{s\to 0}$$

$$k_3 \rightarrow s=0 \rightarrow \frac{5}{4}=1+\frac{k_3}{4} \rightarrow k_3=1$$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید:

$$1)\boldsymbol{F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}}$$

ابتدا کسر را به کسرهای جزئی تجزیه می کنیم

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+1}$$

$$k_1=\lim_{s\to -2}(s+2)\,F(s)=\lim_{s\to -2}\frac{s+3}{s+1}=-1$$

$$k_2=\lim_{s\to -1}(s+1)\,F(s)=\lim_{s\to -1}\frac{s+3}{s+2}=2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+1}\right]=(-e^{-2t}+2e^{-t})u(t)$$

$$2)\boldsymbol{F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}}$$

$$\begin{array}{l|l}
s^3+5s^2+9s+7 & s^2+3s+2 \\ \cline{2-2}
-\left(s^3+3s^s+2s\right) & s+2 \\ \cline{1-1}
\quad 2s^2+7s+7 & \\
-\quad\left(2s^2+6s+4\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad s+3 &
\end{array}$$

$$\to F(s)=s+2+\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s+2+\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{s+2+\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^n\}=\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\Rightarrow\frac{d}{dt}\delta(t)+\delta(t)+(-e^{-2t}+2e^{-t})u(t)$$

$$\mathbf{3)}\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{s^2+2}}{\boldsymbol{(s+1)^3(s-2)}}$$

در این کسر یک ریشه مرتبه ۳ داریم، پس برای این ریشه سه کسر متفاوت خواهیم داشت.

$$F(s) = \frac{s^2+2}{(s+1)^3(s-2)} = \frac{k_1}{(s+1)^3} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{(s+1)} + \frac{k_4}{(s-2)}$$

$$k_1 = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}}\left((s+1)^3F(s)\right) = \lim_{s\to -1}\left(\frac{s^2+2}{(s-2)}\right) = -1$$

$$k_2 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^{3-2}}{ds^{3-2}}\left((s+1)^3F(s)\right) = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+2}{(s-2)}\right)\lim_{s\to -1}\left(\frac{s^2-4s-2}{(s-2)^2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$k_3 = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}}\left((s+1)^3F(s)\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^2+2}{(s-2)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s(s-2)-(s^2+2)}{(s-2)^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\left(\frac{(2s-4)(s-2)-2(s-2)(s^2-4s-2)}{(s-2)^4}\right)$$

$$\Rightarrow k_3 = \frac{2}{9}$$

$$k_4 = \lim_{s\to 2}\left((s-2)F(s)\right) = \lim_{s\to 2}\left(\frac{s^2+2}{(s+1)^3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$F(s) = \frac{s^2+2}{(s+1)^3(s-2)} = \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{1}{3(s+1)^2} + \frac{2}{9(s+1)} + \frac{2}{9(s-2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}\right\} = t^n e^{-at}u(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^3}\right\} \xrightarrow{\text{صورت کسر } 2!} \frac{-1}{2}t^2e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{1}{3(s+1)^2} + \frac{2}{9(s+1)} + \frac{2}{9(s-2)}\right\}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}t^2e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} + \frac{2}{9}e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t}\right)u(t)$$

پایان جلسه دوم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان