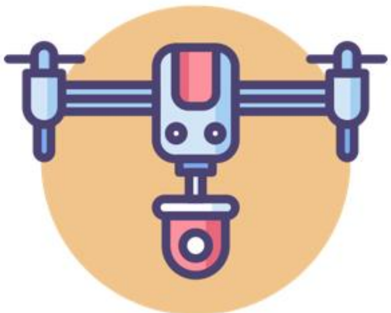
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه سوم

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس

اکنون که تبدیل لاپلاس و عکس آن را فرا گرفتیم، به حل معادلات دیفرانسیلی با استفاده از تبدیل لاپلاس می پردازیم. برای حل معادلات دیفرانسیلی از طریق لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل، تبدیل لاپلاس می گیریم. با مرتب سازی معادله و محاسبه لاپلاس تابع مجهول، از طریق عکس تبدیل لاپلاس، تابع زمانی معادل را محاسبه می کنیم.

$$\mathbf{1)\ 2y'' + 7y' + 3y = 0}$$

$$\mathbf{y(0) = 3}$$

$$\mathbf{y'(0) = 0}$$

$$\mathcal{L}\{2y'' + 7y' + 3y\} = \mathcal{L}\{0\} \Longrightarrow 2\mathcal{L}\{y''\} + 7\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$\Longrightarrow 2\left(S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)\right) + 7\left(SY(s) - y(0)\right) + 3Y(s) = 0$$

$$\Longrightarrow 2S^2Y(s) - 6S - 0 + 7SY(s) - 21 + 3Y(s) = 0$$

$$Y(s)(2S^2 + 7S + 3) = 6S + 21$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{6S + 21}{(2S^2 + 7S + 3)} = \frac{6S + 21}{2(s+3)(s+0.5)} = \frac{k_1}{(s+3)} + \frac{k_2}{(s+0.5)}$$

$$k_1 = \lim_{s\to -3}(s+3)\,Y(s) = \lim_{s\to -3}\frac{6S + 21}{2(s+0.5)} = -0.6$$

$$k_2 = \lim_{s\to -0.5}(s+0.5)\,Y(s) = \lim_{s\to -0.5}\frac{6S + 21}{2(s+3)} = 3.6$$

$$Y(s) = \frac{-0.6}{(s+3)} + \frac{3.6}{(s+0.5)} \Longrightarrow y(t) = (-0.6e^{-3t} + 3.6e^{-0.5t})u(t)$$

$$\mathbf{2)\,y' + 2y = \delta(t)}$$

$$\mathbf{y(0) = 3}$$

$$\mathcal{L}\{y' + 2y\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} \Longrightarrow \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 1$$

$$\left(SY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 1 \Longrightarrow SY(s) - 0 + 2Y(s) = 1$$

$$Y(s)(S + 2) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)} \Longrightarrow y(t) = (e^{-2t})u(t)$$

$$3)\ y'' + 2y' + 5y = 3\delta(t)$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 5y\} = \mathcal{L}\{3\delta(t)\} \Longrightarrow \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = 3$$

$$\Longrightarrow \left(S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(SY(s) - y(0)\right) + 5Y(s) = 3$$

$$\Longrightarrow S^2Y(s) - 0 - 0 + 2SY(s) - 0 + 5Y(s) = 0$$

$$Y(s)(S^2 + 2S + 5) = 3$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{3}{(S^2 + 2S + 5)} = \frac{3}{(S+1)^2 + 2^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\omega_0}{(S+a)^2 + \omega_0^2}\} \Longrightarrow e^{-at}sin(\omega_0 t)u(t)$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{3}{(S+1)^2 + 2^2} \xrightarrow{\text{2 صورت کسر}} Y(s) = \frac{3 \times \frac{2}{2}}{(S+1)^2 + 2^2}$$

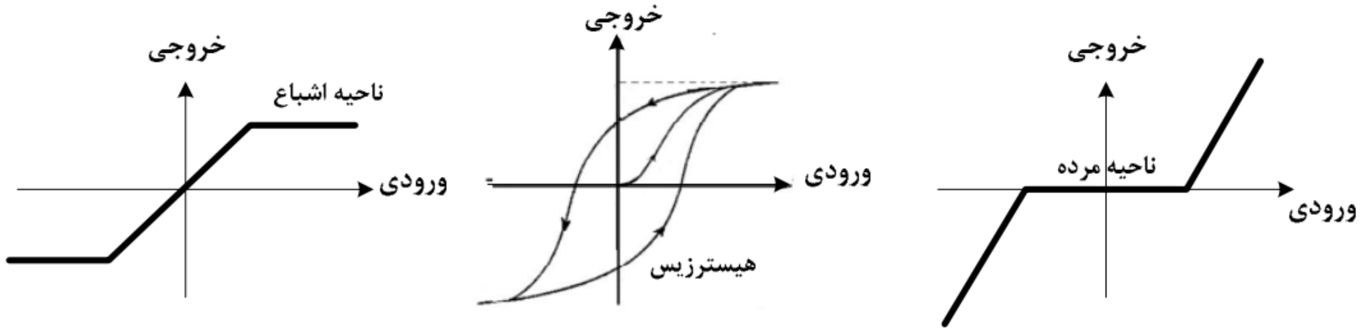
$$\Longrightarrow y(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-t}sin(2t)\right)u(t)$$

تعاریف مهم

سیستم های خطی و غیرخطی: سیستمی خطی است که خاصیت جمع آثار در مورد آن صادق باشد، یعنی پاسخ ناشی از اعمال همزمان چندین ورودی (تحریک)، برابر جمع پاسخ های ناشی از تک تک این ورودی‌ها باشد. از نظر ریاضی، این مشخصه سیستم را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \to y_n(t) \end{cases} \to \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) \to \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t)$$

در غیر این صورت سیستم غیر خطی است.



انواع مشخصه ورودی- خروجی سیستم های غیرخطی

سیستم تغییرناپذیر با زمان: از نظر مفهومی، سیستم تغییر ناپذیر با زمان است اگر رفتار و مشخصه هاي سیستم در طی زمان ثابت باشند. از نظر ریاضی، این مشخصه سیستم را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$x(t) \rightarrow y(t) \longrightarrow x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان: سیستمی که دو خصوصیت خطی بودن و تغییر ناپذیري با زمان را داشته باشد، سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) خوانده می‌شود.

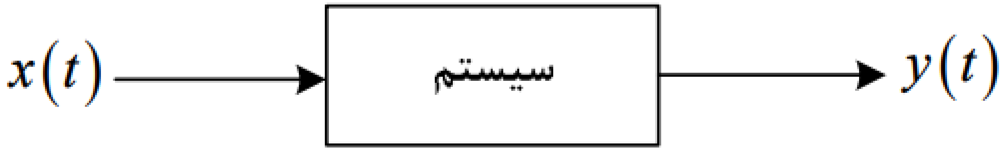
سیستم حافظه دار و سیستم بدون حافظه: سیستمی را بدون حافظه گویند اگر خروجی آن به ازای هر مقدار از متغیر مستقل در یک زمان مفروض، فقط به ورودی در همان زمان بستگی داشته باشد. سیستمی که این خاصیت را نداشته باشد، سیستم حافظه دار گویند. مفهوم حافظه در یک سیستم، منتاظر با وجود مکانیزمی در سیستم است که اطلاعاتی را درباره مقادیر ورودی در زمان هایی بجز لحظه جاری، نگهداشته یا ذخیره می کند.

سیستم عِلّی: سیستمی را عِلّی گویند اگر خروجی در لحظه فقط به مقادیر ورودی در لحظه کنونی و گذشته بستگی داشته باشد. چنین سیستمی را اغلب غیرپیشگو گویند زیرا سیستم مقادیر آینده را پیش بینی نمی کند.

سیستم پایدار: اگر خروجی (پاسخ) یک سیستم به یک ورودی کراندار (یعنی مقدار ورودی بدون حد افزایش نیابد) کراندار باشد،سیستم را پایدار می نامند. به بیان غیر رسمی، سیستم پایدار سیستمی است که در آن ورودی های کوچک به خروجی هایی منجر می شوند که همگرا باشند.

تابع تبدیل:

تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، طبق تعریف نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن می باشد. بنابراین، اگر تابع تبدیل یک سیستم را با $G(s)$ نمایش دهیم داریم:



یک سیستم با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$

$$G(s)=\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}}=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

نکات مهم:

۱-تابع تبدیل به مشخصات سیستم بستگی دارد و مستقل از ورودی و خروجی است.

۲ -تابع تبدیل هیچ اطلاعاتی در خصوص ساختار فیزیکی سیستم به ما نمی دهد. در واقع توابع تبدیل چندین سیستم مختلف و کاملاً متفاوت می تواند یکسان باشد.

۳ - اگر تابع تبدیل یک سیستم مشخص باشد، پاسخ سیستم به هر ورودی را می توان محاسبه نمود.

٤ -تابع تبدیل سیستم های عملی (که خطی نیستند)، بطور تجربی و بررسی ورودی - خروجی های گوناگون بدست می آید.

۵ -اگر ورودی سیستم سیگنال ضربه باشد، داریم:

$$x(t)=\delta(t)\rightarrow X(s)=1\rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=Y(s)$$

بنابراین تابع تبدیل، همان لاپلاس خروجی سیستم به ورودی ضربه (لاپلاس پاسخ ضربه سیستم) است.

٦ -برای محاسبه تابع تبدیل یک سیستم، شرایط اولیه همواره صفر در نظر گرفته می شوند.

معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

با گرفتن لاپلاس و شرایط اولیه صفر:

$$a_ns^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+\ldots+a_1sY(s)+a_0Y(s)=b_ms^mX(s)+b_{m-1}s^{m-1}X(s)+\ldots+b_1sX(s)+b_0X(s)$$
$$\rightarrow Y(s)\left(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}++\ldots+a_1s+a_0\right)=X(s)\left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0\right)$$

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

برای رسیدن از تابع تبدیل به معادله دیفرانسیل کافیست عکس روش فوق را بکار بگیریم.

چند جمله‌ای صورت $N(s)=b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0$

چند جمله‌ای مخرج $D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$

قطب: ریشه‌های $D(s)$ تابع تبدیل

نکته: مرتبه قطب: درجه تکرار یک قطب

صفر: ریشه‌های $N(s)$ تابع تبدیل

نکته: مرتبه صفر: درجه تکرار یک صفر

مرتبه تابع تبدیل: درجه چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل

درجه سیستم یا درجه نسبی: $(n-m)$ درجه مخرج منفی درجه صورت

مثال: مرتبه و درجه سیستم زیر را بنویسید:

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)} \text{ یا } \boldsymbol{T(s)}=\frac{\boldsymbol{(S^2+3S+4)}}{\boldsymbol{(S^2+4S+5)(S+1)}}$$

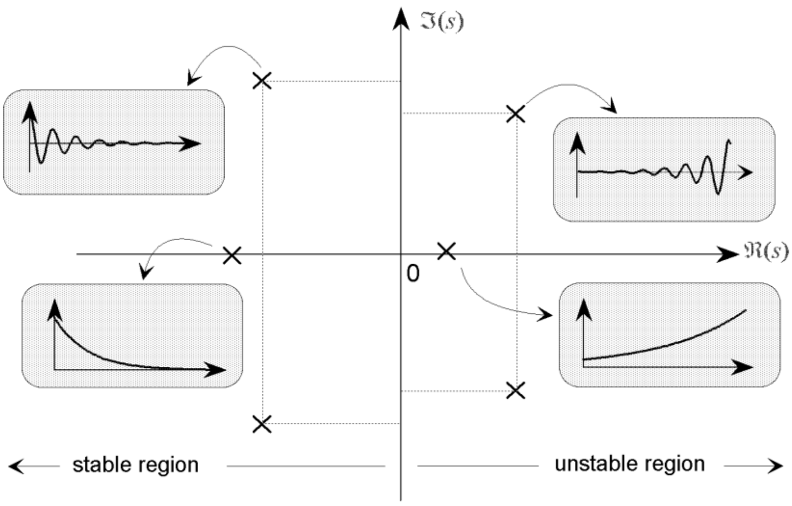
مرتبه ۳

درجه $(n-m)=3-2=1$

صفرها (z): $S=-1\,,-3$

قطب‌ها(P): $S=-2\pm j\,,-1$

مفهوم قطب: اگر تابع تبدیل با فرکانس قطب سیستم تحریک شود(ورودی با فرکانس قطب تابع تبدیل برابر باشد)، خروجی به سمت ∞ می‌رود.



مثال: خروجی سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)}\text{ یا }\boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{S+1}}{\boldsymbol{(S^2+9)(S+2)}} \quad ,\boldsymbol{x(t) = sin(3t)\ and\ cos(3t)}$$

$$\Longrightarrow\ x(t) = sin(3t) \Longrightarrow \mathcal{L}\{sin(3t)\} \Longrightarrow\ X(s) = \frac{3}{(S^2+9)}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{3}{(S^2+9)} \times \frac{S+1}{(S^2+9)(S+2)} = \frac{3(S+1)}{(S^2+9)^2(s+3)}$$

$$\Longrightarrow \frac{3(S+1)}{(S^2+9)^2(s+3)} = \frac{k_1}{(S^2+9)^2} + \frac{k_2}{(S^2+9)} + \frac{k_3}{(s+2)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{(S^2+9)^2}\right\} = a \cdot t \cdot sin(3t) = \infty \text{ بی‌کران}$$

$$Y(s) = \frac{3(S+1)}{(S^2+9)^2(s+3)} = \frac{k_1}{(S^2+9)^2} + \frac{k_2}{(S^2+9)} + \frac{k_3}{(s+2)} = \infty \text{ بی‌کران}$$

$$\mathbf{2)}\boldsymbol{G(s)}\text{ یا }\boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{S+1}}{\boldsymbol{S(S+2)}} \quad ,\boldsymbol{x(t) = A\,u(t)}$$

$$\Longrightarrow\ x(t) = A\,u(t) \Longrightarrow \mathcal{L}\{A\,u(t)\} \Longrightarrow\ X(s) = \frac{A}{S}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{A}{S} \times \frac{\boldsymbol{S+1}}{\boldsymbol{S(S+2)}} = \frac{A(S+1)}{S^2(S+2)}$$

$$\Longrightarrow \frac{A(S+1)}{S^2(S+2)} = \frac{k_1}{S^2} + \frac{k_2}{S} + \frac{k_3}{(s+2)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{S^2}\right\} = a \cdot t \cdot u(t) = \infty \text{ بی‌کران}$$

$$Y(s) = \frac{A(S+1)}{S^2(S+2)} = \frac{k_1}{S^2} + \frac{k_2}{S} + \frac{k_3}{(s+2)} = \infty \text{ بی‌کران}$$

مفهوم صفر: اگر سیستم با صفر تابع تبدیل تحریک شود، پاسخ ناشی از آن ورودی با آن فرکانس در خروجی ظاهر نمی‌شود.(صفر می‌شود)

مثال: خروجی سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)}\text{ یا }\boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{(S^2+4)}}{\boldsymbol{(S+1)(S+2)}} \quad ,\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{\sin(2t)}$$

$$\Longrightarrow\ x(t) = sin(2t) \Longrightarrow \mathcal{L}\{sin(2t)\} \Longrightarrow\ X(s) = \frac{2}{(S^2+4)}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{2}{(S^2+4)} \times \frac{(S^2+4)}{(S+1)(S+2)} = \frac{2}{(S+1)(S+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(S+1)(S+2)}\right\} = k_1 e^{-at}u(t) + k_2 e^{-2t}u(t)$$

اصل برابری تعداد قطب‌ها و صفر: این اصل می‌گوید تعداد صفر و قطب‌های تابع تبدیل با احتساب صفر و قطب‌ها در ∞ با یک دیگر برابر هستند.

مثال: تعداد صفرها و قطب‌های بینهایت را مشخص کنید.

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)}\text{ یا }\boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{(S+4)}}{\boldsymbol{S(S+1)(S+2)}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ m = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{2 صفر در } \infty$$

$$\mathbf{2)}\boldsymbol{G(s)}\text{ یا }\boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{S^2(S+4)(S+1)}}{\boldsymbol{(S+1)(S+2)}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 4 \end{cases} \Longrightarrow \text{2 قطب در } \infty$$

$$\mathbf{3)}\boldsymbol{G(s)}\text{ یا }\boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{S(S+4)}}{\boldsymbol{(S+1)(S+2)}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 2 \end{cases} \Longrightarrow \text{صفر و قطب نامحدود ندارد.}$$

معادله مشخصه: چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل حلقه بسته $\boldsymbol{T(s)}$ یا $\boldsymbol{G(s)}$ را برابر صفر قرار داده می‌شود.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

مثال: معادله مشخصه تابع تبدیل زیر را مشخص کنید.

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{G(s)} \text{ یا } \boldsymbol{T(s)} = \frac{\boldsymbol{(S+4)}}{\boldsymbol{(S+1)(S+2)}}$$

$$\Longrightarrow S^2 + 3S + 2 = 0$$

نکته: ریشه‌های معادله مشخصه را قطب سیستم یا فرکانس طبیعی می‌گوئیم و رفتار و ذات سیستم را بیان می‌کند.

تقسیم بندی سیستم از نظر درجه نسبی

درجه مخرج n و درجه صورت m

۱- $n > m$ درجه مخرج بزرگتر از صورت باشد، تابع تبدیل اکیدا سره (مناسب قطعی) است.(strictly proper)

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$

۲- $n = m$ تابع تبدیل سره (مناسب) است. (proper)

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \text{عدد ثابت}$$

۳- $n < m$ تابع تبدیل ناسره (نامناسب) است. (improper)

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \infty$$

مثال: تابع تبدیل سیستم هاي توصیف شده زیر را بدست آورید.

$$1)\ \boldsymbol{5y''' + 4y'' + y = 2x' + 14x}$$

مقادیر اولیه داده نشده پس صفر در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{L}\{5y''' + 4y'' + y\} = \mathcal{L}\{2x' + 14x\}$$

$$\Longrightarrow 5S^3Y(s) + 4S^2Y(s) + Y(s) = 2SX(s) + 14X(s)$$

$$\Longrightarrow Y(s)(5S^3 + 4S^2 + 1) = X(s)(2S + 14)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(2S + 14)}{(5S^3 + 4S^2 + 1)}$$

$$2)\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \delta(t)} \\ \boldsymbol{y(t) = (e^{-3t} - 2e^{-t})u(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \delta(t) \\ y(t) = (e^{-3t} - 2e^{-t})u(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(s) = 1 \\ Y(S) = \dfrac{1}{S+3} - \dfrac{1}{S+1} = \dfrac{s+1-s-3}{(S+3)(S+1)} = \dfrac{-2}{S^2+4S+3} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{-2}{S^2+4S+3}}{\frac{1}{1}} = \frac{-2}{S^2+4S+3}$$

$$3)\boldsymbol{y'' + 2y' + 5y = 3x}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 5y\} = \mathcal{L}\{3x\}$$

$$\Longrightarrow S^2Y(s) + 2SY(s) + 5Y(s) = 3X(s)$$

$$\Longrightarrow Y(s)(S^2 + 2S + 5) = 3X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{S^2 + 2S + 5}$$

با توجه به تابع تبدیل داده شده، پاسخ سیستم را به ورودی $x(t)$ محاسبه نمایید.

$$\mathbf{1)}\begin{cases} \boldsymbol{G(s)} = \dfrac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{S^2+5S+6}} \\ \boldsymbol{x(t) = (1-e^{-5t})u(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{10}{S^2+5S+6} = \dfrac{10}{(S+2)(S+3)} = \dfrac{Y(s)}{X(s)} \\ X(s) = \mathcal{L}\{(1-e^{-5t})u(t)\} = \dfrac{1}{S} - \dfrac{1}{S+5} = \dfrac{s+5-s}{S(S+5)} = \dfrac{5}{S(S+5)} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{10}{(S+2)(S+3)} \times \frac{5}{S(S+5)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{50}{S(S+2)(S+3)(S+5)} = \frac{k_1}{S} + \frac{k_2}{S+2} + \frac{k_3}{(S+3)} + \frac{k_1}{(S+5)}$$

$$k_1 = \lim_{s\to 0} S\,Y(s) = \lim_{s\to 0} S \times \frac{50}{S(S+2)(S+3)(S+5)} = \frac{5}{3}$$

$$k_2 = \lim_{s\to -2} (S+2)\,Y(s) = \lim_{s\to -2} (S+2) \times \frac{50}{S(S+2)(S+3)(S+5)} = \frac{-25}{3}$$

$$k_3 = \lim_{s\to -3} (S+3)\,Y(s) = \lim_{s\to -3} (S+3) \times \frac{50}{S(S+2)(S+3)(S+5)} = \frac{25}{3}$$

$$k_4 = \lim_{s\to -5} (S+5)\,Y(s) = \lim_{s\to -5} (S+5) \times \frac{50}{S(S+2)(S+3)(S+5)} = \frac{-5}{3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{S} - \frac{5}{S+2} + \frac{5}{(S+3)} - \frac{1}{(S+5)}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{3}(1 - 5e^{-2t} + 5e^{-3t} - e^{-5t})u(t)$$

پاسخ پله سیستم توصیف شده بصورت زیر را محاسبه نمایید.

$$\mathbf{1)\ G(s) = \frac{S(S+3)}{S^2 + 4S + 20}}$$

$$\Rightarrow x(t) = u(t) \rightarrow X(S) = \frac{1}{S}$$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s) \times X(S) = \frac{S(S+3)}{S^2 + 4S + 20} \times \frac{1}{S} = \frac{(S+3)}{S^2 + 4S + 20}$$

$$S^2 + 4S + 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 80 < 0$$

در محاسبه عکس تبدیل لاپلاس هر زمان ریشه های مخرج موهومی بودند، فرم کلی پاسخ

$$\mathcal{L}\{e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)\} \Rightarrow \frac{S+a}{(S+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}sin(\omega_0 t)u(t)\} \Rightarrow \frac{\omega_0}{(S+a)^2 + \omega_0^2}$$

برای محاسبه مقادیر مجهول، معیار را مخرج کسرها قرار می دهیم:

$$S^2 + 4S + 20 = (S+a)^2 + \omega_0^2 = S^2 + 2aS + a^2 + \omega_0^2$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow a^2 + \omega_0^2 = 4 + \omega_0^2 = 20 \rightarrow \omega_0^2 = 16 \Rightarrow \omega_0 = 4$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(S+2+1)}{(S+2)^2 + 4^2} = \frac{(S+2)}{(S+2)^2 + 4^2} + \frac{1}{(S+2)^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(S+2)}{(S+2)^2 + 4^2} + \frac{1 \times \frac{4}{4}}{(S+2)^2 + 4^2} = \frac{(S+2)}{(S+2)^2 + 4^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{(S+2)^2 + 4^2}\right)$$

$$y(t) = \left(e^{-2t}\cos(4t) + \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(4t)\right)u(t) = e^{-2t}\left(\cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(4t)\right)u(t)$$

پاسخ ضربه سیستم توصیف شده بصورت زیر را محاسبه نمایید.

$$1)\ \boldsymbol{G(s)=\frac{1}{S(S+1)}}$$

$$\Rightarrow x(t)=\delta(t)\rightarrow X(S)=1$$

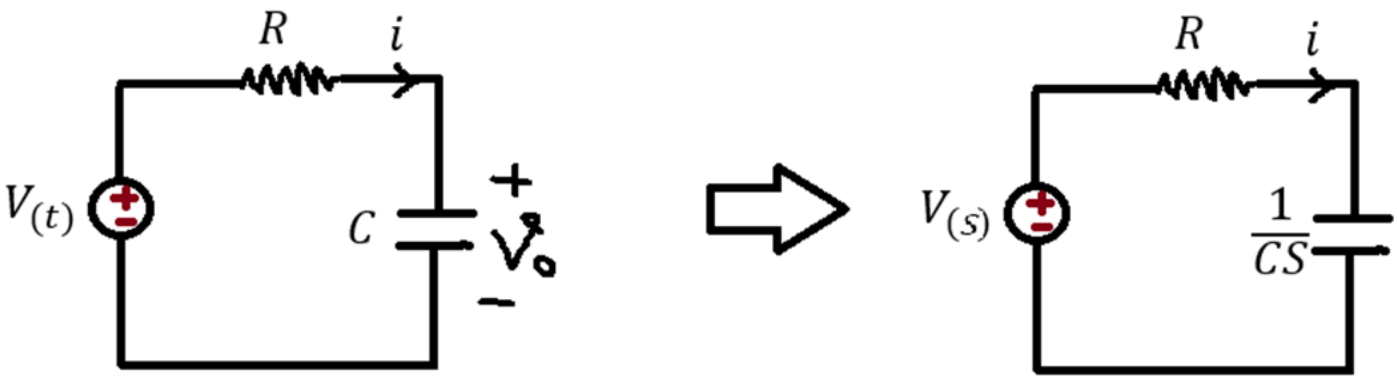
$$\Rightarrow Y(s)=G(s)\times X(S)=\frac{1}{S(S+1)}\times 1=\frac{1}{S(S+1)}=\frac{k_1}{S}+\frac{k_2}{S+1}$$

$$k_1=\lim_{s\to 0} S\,Y(s)=\lim_{s\to 0} S\times\frac{1}{S(S+1)}=1$$

$$k_2=\lim_{s\to -1}(S+1)\,Y(s)=\lim_{s\to -1}(S+1)\times\frac{1}{S(S+1)}=-1$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}\right)\Rightarrow y(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

تابع تبدیل مدار زیر را بدست آورید.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{v_o}{v_i}$$

$$v_o=i\times\frac{1}{SC}\rightarrow i=\frac{v_s}{R+\frac{1}{SC}}\rightarrow v_o=\frac{v_s}{R+\frac{1}{SC}}\times\frac{1}{SC}=\frac{v_s}{RSC+1}$$

$$G(s)=\frac{v_o}{v_i}=\frac{\frac{v_s}{RSC+1}}{v_s}=\frac{1}{RSC}$$

$$v_o=\ G(s)\times X(s)=G(s)\times v_i\rightarrow v_o=\frac{1}{RSC}\times v_s$$

پایان جلسه سوم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان