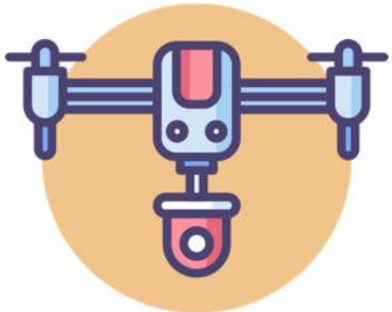
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه چهارم

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

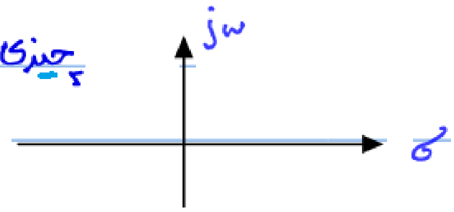
برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

بررسی قطب های تابع تبدیل

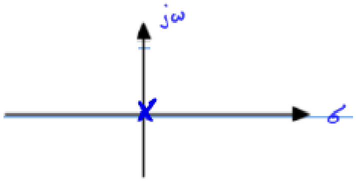
$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

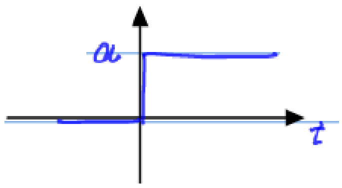
$$2\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2$$

چیزی برای نمایش ندارد

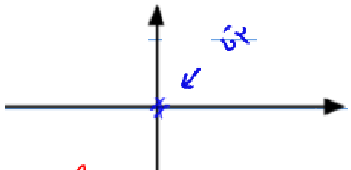


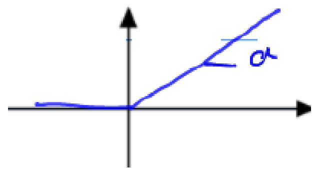
$$a\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s} \quad \text{Pole}: s=0$$





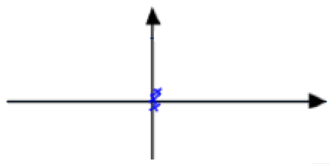
$$a\,t\,u(t) \longrightarrow \frac{a}{s^2} \quad \text{Pole}: s=0,0$$

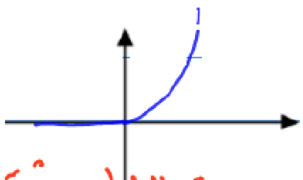




قطب مکرر باعث ناپایداری سیگنال می‌گردد

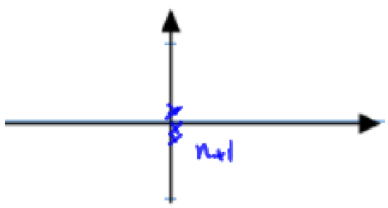
$$a\frac{1}{2}t^2u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^3} \quad \text{Pole}: s=0,0,0$$

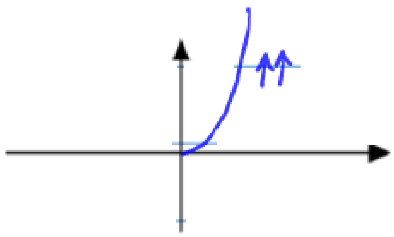




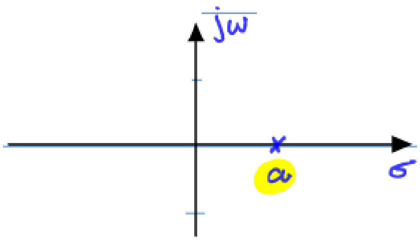
سرعت ناپایداری بیشتر شد.

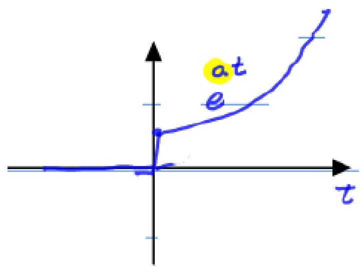
$$t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}$$



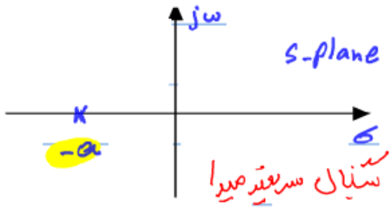


$$e^{+at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad \text{Pole}: s=a$$



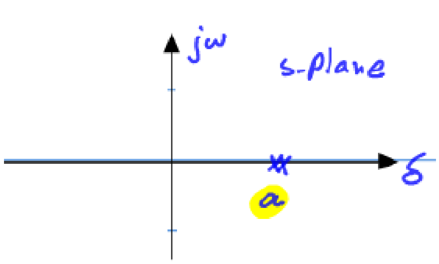


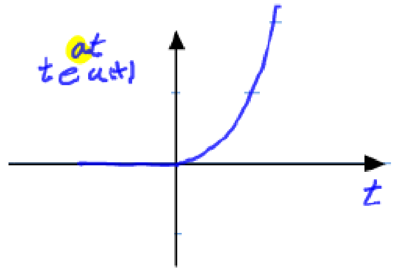
$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+a}$ pole : $s=-a$



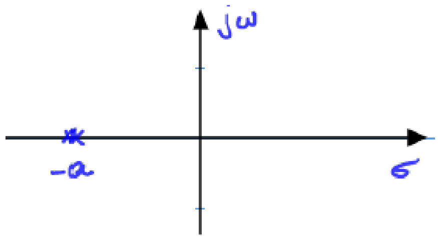
هرچقدر به سمت منفی برود سیگنال سریع‌تر میرا می‌شود.

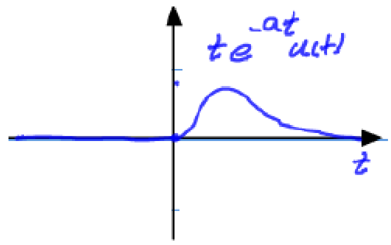
$te^{at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{(s-a)^2}$



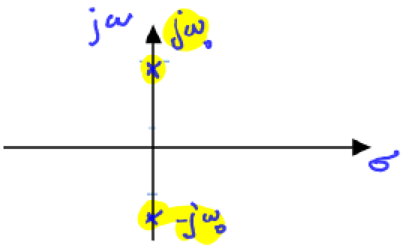


$te^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{(s+a)^2}$

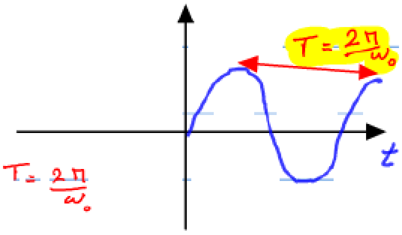




$\sin \omega_0 t\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$



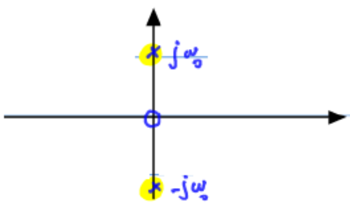
$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

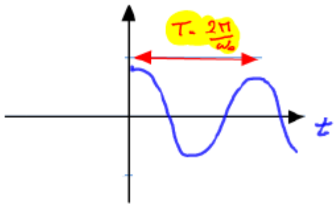


$s^2+\omega_0^2=0 \longrightarrow s^2=-\omega_0^2 \rightarrow s=\pm\sqrt{-\omega_0^2}=\pm j\omega_0$

هرچقدر قطب های ω_0 به سمت بالاتر حرکت کنند ω_0 زیادتر خواهد و سیگنال زمانی نوسانی تر خواهد بود.

$\cos \omega_0 t\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ Zero : $s=0$ pole : $s=\pm j\omega_0$

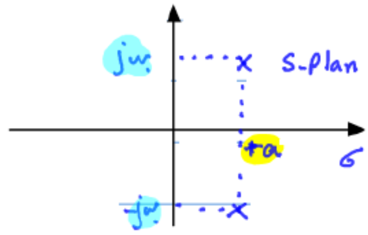


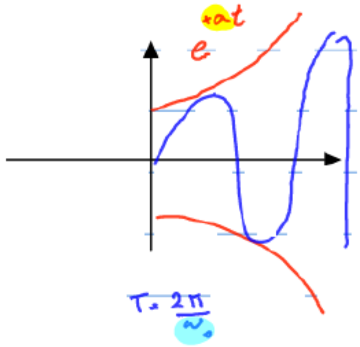


تفاوتی که تبدیل لاپلاس cos ها دارد وجود صفر زیر قطب ها روی محور حقیقی است یعنی اگر قطب مزدوج موهومی به همراه صفر دیدیم یاد cos می افتیم.

$$e^{+at}\sin\omega_0 t\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

pole : $s = +a \pm j\omega_0$



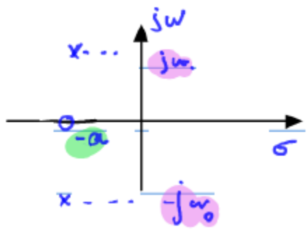


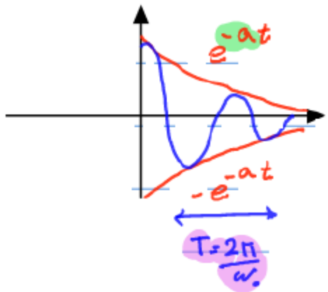
$$e^{-at}\sin\omega_0 t\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t) \longrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

Z: $s = -a$

P: $-a \pm j\omega_0$



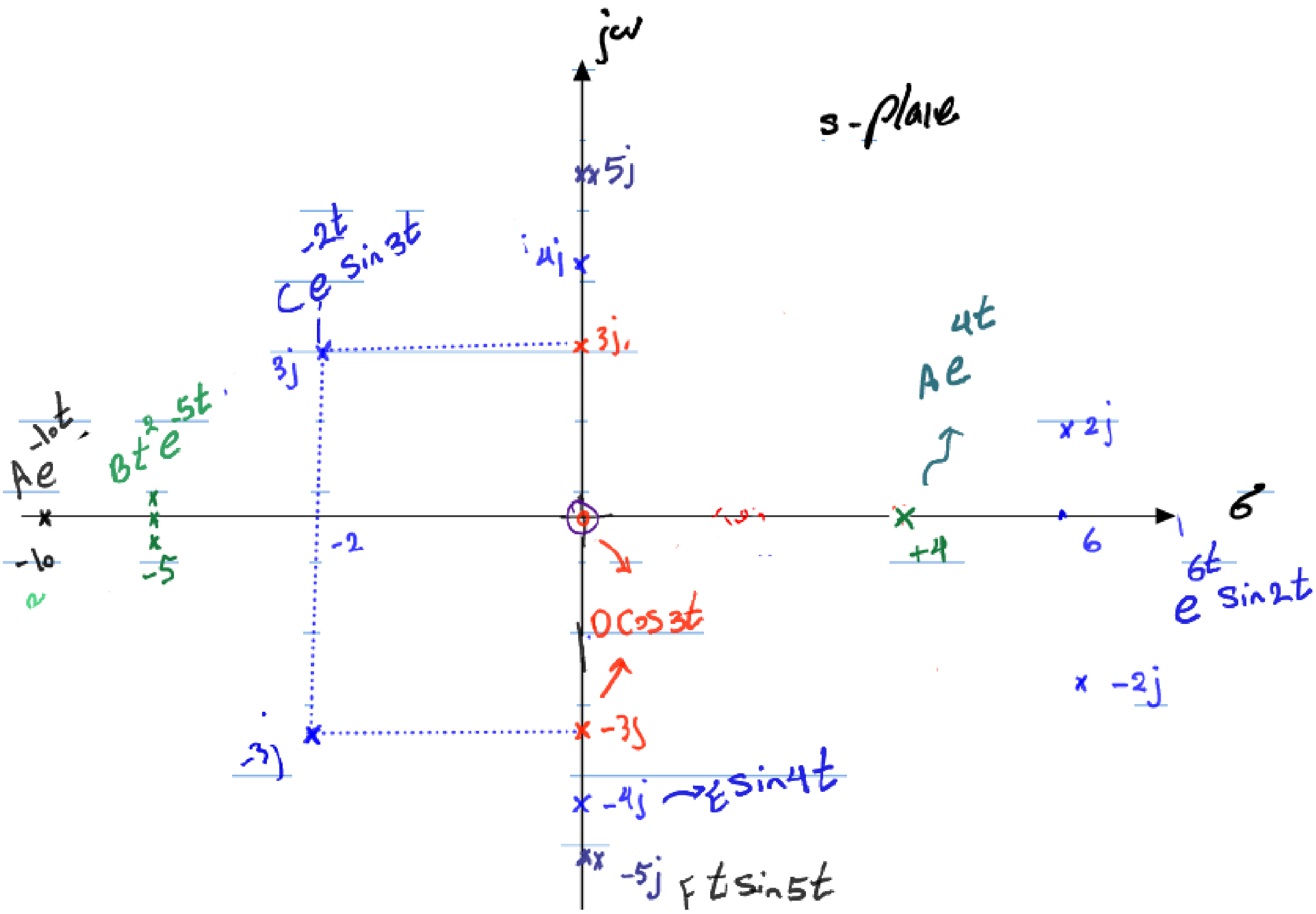


مقدار سرعت برش بوسیله مقدار حقیقی قطب‌ها تعیین می‌شود.

نوسانی بودن پاسخ بوسیله موهومی بودن قطب‌ها تعیین می‌شود.

اگر صفر داشته باشیم (صفر حقیقی) نوسانی cos خواهد بود.

با توجه به مکان قطب های تبدیل لاپلاس سیگنال تقریبی زمان را بنویسید.



نکته: اینها فرم سیگنال هستند و صفحه مختلط قادر به نمایش دامنه سیگنال نمی‌باشد.

نکته: قطب حقیقی ⟷ نمایی

قطب حقیقی منفی ⟷ میرایی

〃 〃 مثبت ⟷ نامیرایی

قطب موهومی خالص ⟷ فقط نوسان ← Sin (بدون صفر حقیقی) , Cos (همراه صفر حقیقی) — $s = \pm 3j$ قطبها

قطب مختلط ⟷ هم نمایی و هم نوسانی — $(-2 \pm j3)$ — $e^{-2t} \times \sin 3t$

قطب حقیقی منفی ⟷ میرایی   قطب حقیقی مثبت ⟷ نامیرایی

قطب موهومی خالص ⟷ فقط نوسان با فرکانس مقدار موهومی قطب

قطب مختلط ⟷ هم نمایی و هم نوسان

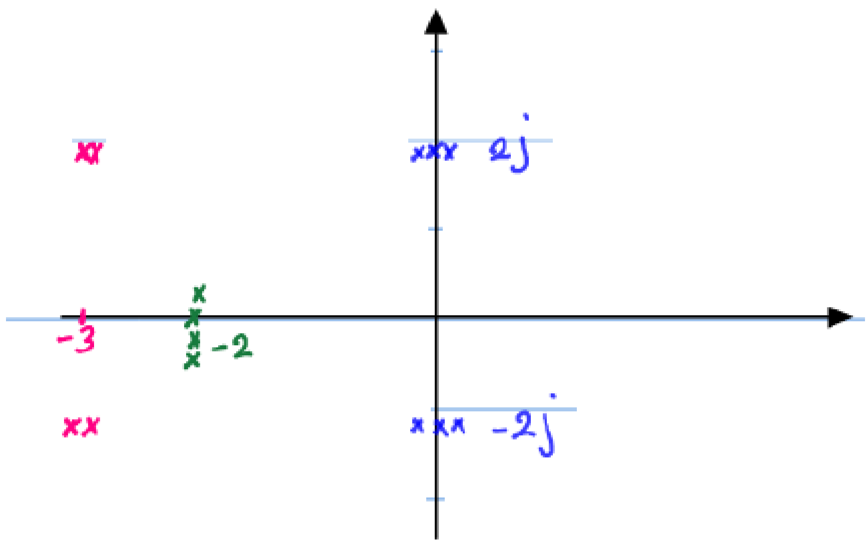
قطب مختلط با مقدار حقیقی منفی ⟷ نوسانی میرا (پایدار) 

قطب مختلط با مقدار حقیقی مثبت ⟷ نوسان نامیرا 

قطب حقیقی دوبل در لاپلاس ⟷ نمایی $t^1 \times$

قطب حقیقی سوبل در لاپلاس ⟷ نمایی $t^2 \times$

مثال: فرم $x(t)$ چگونه است؟

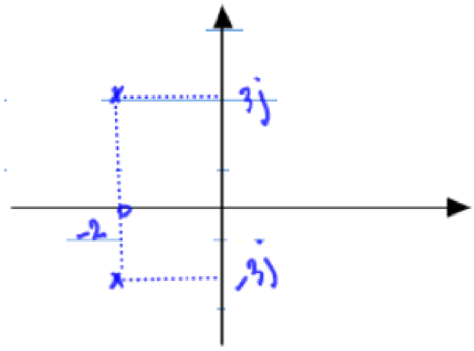


$$x(t) = \left(A t e^{-3t} \sin 2t + B t^3 e^{-2t} + C t^2 \sin 2t\right) u(t)$$

تاثیر صفر و قطب: قطب فرم سیگنال را تعیین می‌کند و اثر همزمان صفر و قطب (فاصله صفر و قطب ها از هم) دامنه را تعیین می‌کند.

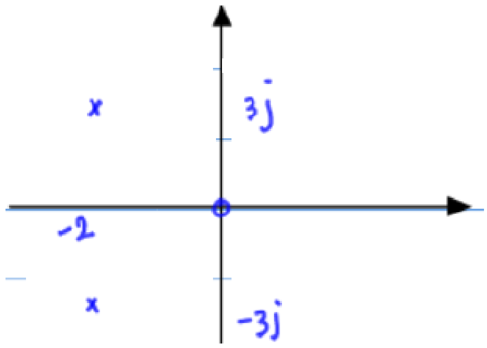
مثال: تاثیر صفر و قطب های زیر در پاسخ بررسی کنید.

$$1)\ F_{(s)} = \frac{S+2}{(S+2)^2}$$



$$F(s) = \frac{S+2}{(S+2)^2+9} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-2t}\cos 3t\ u(t)$$

$$2)\ F_{(s)} = \frac{S}{(S+2)^2+9}$$

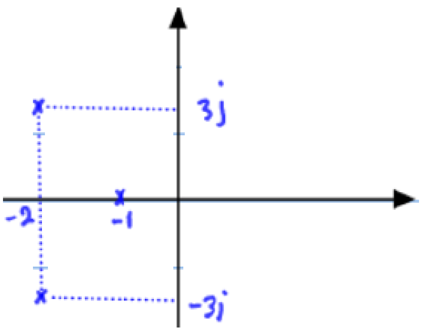


$$F(s) = \frac{S}{(S+2)^2+9} = \frac{S+2}{(S+2)^2+9} - \frac{2}{(S+2)^2+9}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left(e^{-2t}\cos 3t - 2\times\frac{1}{3}\, e^{-2t}\sin 3t\right)u(t)$$

نکته: اگر صفر دقیقا زیر قطب مختلط نباشد، فاز سینوس عوض می‌شود. (sin و cos با هم ایجاد می‌شود)

$$3)\ F_{(s)} = \frac{A}{(S+1)[(S+2)^2+9]}$$



$$F(s) = \frac{A}{(S+1)[(s+2)^2+9]} = \frac{\quad}{S+1} + \frac{\quad}{(S+2)^2+9}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} Ae^{-t} + Be^{-2t}\sin 3t \qquad t>0$$

ریشه های چند جمله ای

۱) چند جمله‌ای قابل تجزیه $\Delta \geq 0$ (برای درجه ۲)

$$A(s) = s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$(s+1)(s+3) = 0 \longrightarrow \begin{matrix} s = -1 \\ s = -3 \end{matrix}$$

۲) چند جمله‌ای غیر قابل تجزیه $\Delta < 0$

روش اول: $A(s) = as^2 + bs + c = 0 \qquad s_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

روش دوم: $A(s) = s^2 + bs + c = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm j\sqrt{c - (\frac{b}{2})^2}$

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta<0} s_{12} = -1 \pm j\sqrt{2 - (1)^2} = -1 \pm j$$

$$\Delta(s) = s^2 + 4s + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta<0} s_{12} = -2 \pm j\sqrt{5 - (2)^2} = -2 \pm j$$

۳) چند جمله‌ای درجه بیشتر از ۲ :

$$A(s) = as^3 + bs^2 + cs + d = 0$$

الف) جمع ضرایب صفر $(a+b+c+d=0)$ یکی از ریشه‌ها $s=1$ ← عامل $(s-1)$ است

یعنی: $A(s) = (s-1)\underset{\text{درجه ۲}}{Q(s)}$: $A(s) \,\big|\, \dfrac{s-1}{Q(s)}$

حتما باقی‌مانده = 0

با تقسیم $A(s)$ بر $(s-1)$ و $Q(s)$ ۲ ریشه دیگر هم بدست می‌آید.

ب) جمع ضرایب زوج برابر با جمع ضرایب فرد $(a+c=b+d)$

یکی از ریشه‌ها $s=-1$ ← عامل $(s+1)$ و $A(s)$ بر $(s+1)$ بخش پذیر است

تشخیص عامل ریشه‌ها:

۱) چندجمله‌ای درجه ۲ ریشه‌ها حقیقی $A(s)=(s-a)(s-b)(s-c)\dots \rightarrow s=a \,,\, s=b \,,\, s=c \,,\dots$

۲) چند جمله‌ای درجه ۲ ریشه‌ها مختلط $A(s)=s^2-2as+a^2+b^2 \rightarrow s=a\pm jb$

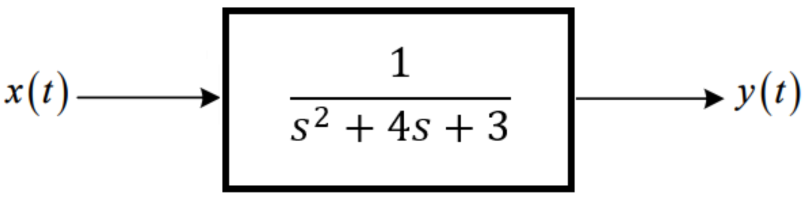
پاسخ سیستم

پاسخ همگن / پاسخ خصوصی / پاسخ کامل / پاسخ حالت گذرا / پاسخ ماندگار

پاسخ همگن

اگر پاسخ سیستم را با ورودی صفر، تحت شرایط اولیه غیر صفر بدست آوریم پاسخ همگن نام دارد. پاسخ همگن به فرکانس های طبیعی یا قطب های سیستم و شرایط اولیه بستگی دارد. قطب های سیستم فرم پاسخ همگن و شرایط اولیه، فاصله صفر و قطب ها از یکدیگر ضرایب عددی پاسخ همگن را می‌سازد.

مثال: پاسخ همگن سیستم زیرا با مقادیر اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ بدست آورید.



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+4s+3}\rightarrow y''+4y'+3y=X(s)\rightarrow X(s)=0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)]=S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)$$

$$\mathcal{L}[y'(t)]=SY(s)-y(0)$$

$$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow (s^2Y(s) - s - 0) + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3} = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y_h(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

فرکانس طبیعی ۱- و ۳-

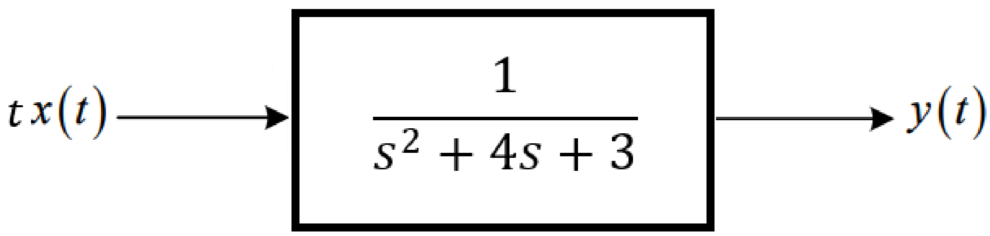
نکته: پاسخ همگن به ذات و شرایط اولیه مربوط است.

نکته: شرایط اولیه ضرایب ترم های پاسخ همگن را تعیین می کند، حتی می‌تواند ضریب فرکانس طبیعی را صفر کند.

پاسخ خصوصی

اگر پاسخ سیستم را با شرایط اولیه صفر و ورودی غیر صفر بدست آوریم، ترم پاسخی که هم فرم با ورودی است را پاسخ خصوصی می گوئیم

فرم پاسخ خصوصی هم فرم ورودی است به شرط آنکه قطب ورودی در سیستم نباشد.



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+4s+3} \Rightarrow Y(s) = X(s) \times G(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \times \frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s^2} \times \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{k_1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{-1}{18}}{s+3}$$

با روش عدد گذاری یا صورت در S ضرب شود و S به سمت بی‌نهایت میل کند.

$$\frac{s1}{s^2(s+1)(s+3)}\Big|_{s\to\infty} = \Big[\frac{s\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{sk_1}{s} + \frac{s\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{s\frac{-1}{18}}{s+3}\Big]\Big|_{s\to\infty}$$

$$k_1 \to s = \infty \to 0 = 0 + k_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \to k_1 = -\frac{4}{9}$$

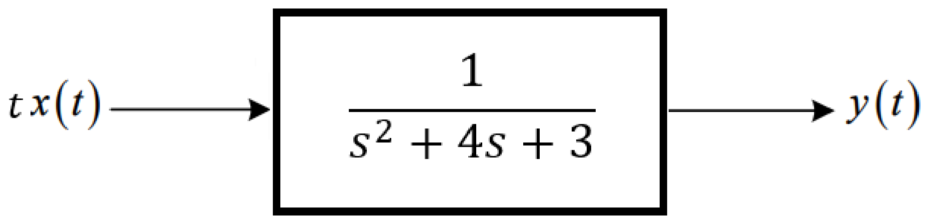
$$y(t) = \frac{1}{3}t - \frac{4}{9} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{18}e^{-3t}$$

پاسخ خصوصی $y_p = \frac{1}{3}t$ ، پاسخ عمومی $y_p = -\frac{4}{9} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{18}e^{-3t}$

پاسخ کامل

مجموع پاسخ همگن و پاسخ خصوصی یک سیستم را پاسخ کامل می گوئیم.

مقادیر اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+4s+3} \to y" + 4y' + 3y = tX(s)$$

$$\mathcal{L}[y^{"}(\mathrm{t})] = S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[y'(\mathrm{t})] = SY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{y(t)}] = Y(s)$$

$$\mathcal{L} \to (s^2Y(s) - s\times 0 - 1) + 4(sY(s) - 0) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)[s^2 + 4s + 3] = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$\Rightarrow\ Y(s)[s^2 + 4s + 3] = \frac{s^2+1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+4s+3)}$$

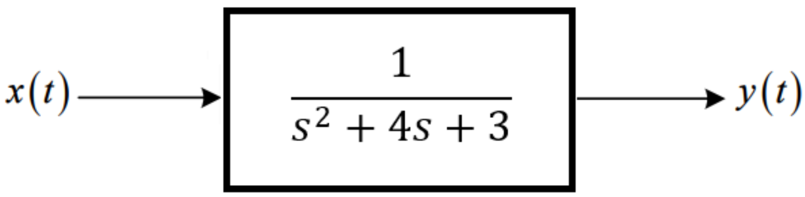
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{k_1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{-5}{9}}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}t + k_1 + e^{-t} - \frac{5}{9}e^{-3t} \qquad t > 0$$

پاسخ حالت گذرا

قسمتی از پاسخ کامل است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

مثال: پاسخ حالت گذرا سیستم زیرا با مقادیر اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ بدست آورید



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow Y(s) = X(s) \times G(s)$$

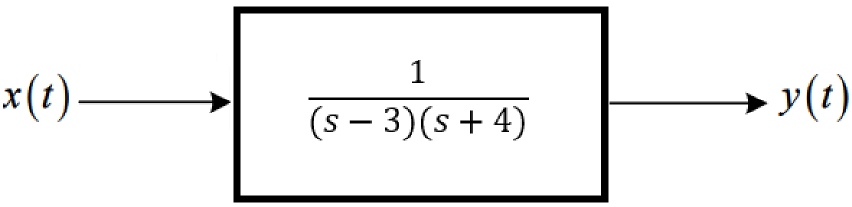
$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} + \frac{\frac{-1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{-1}{6}}{s+3}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

پاسخ حالت گذرا $y_{tr}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$

سوال: آیا پاسخ گذرا همواره با پاسخ همگن برابر است؟

مقادیر اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$



$y(t) = k_1 + k_2e^{+3t} + k_3e^{-4t}$

جواب خصوصی k_1 جواب همگن $k_2e^{+3t} + k_3e^{-4t}$

جواب حالت گذرا $y_{tr}(t) = k_3e^{-4t}$

اگر ورودی ماندگار باشد ($e^{-\alpha t}$ نباشد) و سیستم پایدار باشد ترم های پاسخ همگن به فرم ترم های پاسخ گذرا است

پاسخ حالت ماندگار

قسمتی از پاسخ کامل است که با گذشت زمان از بین نمی‌رود.

مقادیر اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2 + 4s + 3}} \longrightarrow y(t)$$

$y(t) = k_1 + k_2e^{-t} + k_3e^{-3t}$

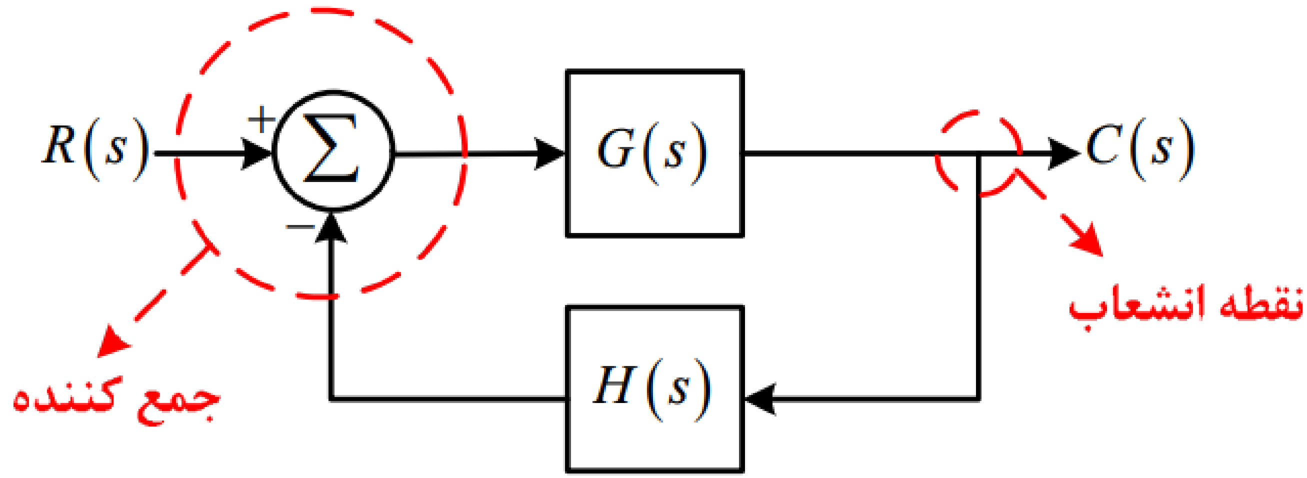
پاسخ حالت ماندگار k_1

پاسخ حالت گذرا $k_2e^{-t} + k_3e^{-3t}$

نمودار بلوکی

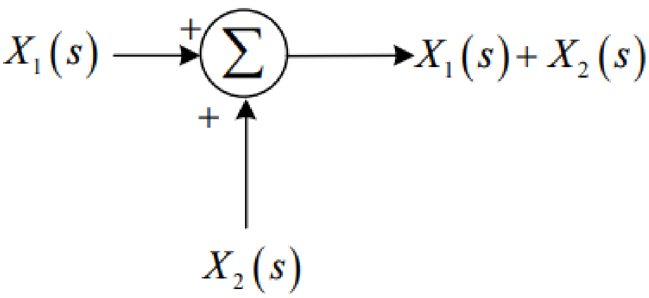
نمودار بلوکی یک سیستم نمایشی ترسیمی برای نمایش کاری است که هر عنصر انجام می دهد و مسیرهای عبور سیگنال‌هاست. نمودار بلوکی بر خلاف نمایش ریاضی محض؛ این مزیت را دارد که عبور سیگنال در سیستم واقعی را بسیار محسوس تر نشان می دهد.

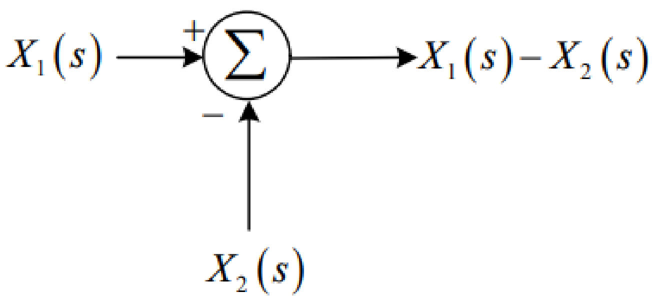
توضیحات بیشتر از طریق مثال بیان می گردد، به نمودار بلوکی زیر توجه کنید:



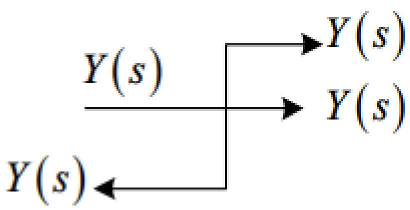
$R(s)$ سیگنال ورودی و C(s) سیگنال خروجی است.

جمع کننده: جمع کننده نشان داده شده بسته به علامت روي هر پيكان سيگنال ها را جمع یا تفریق می‌کند.

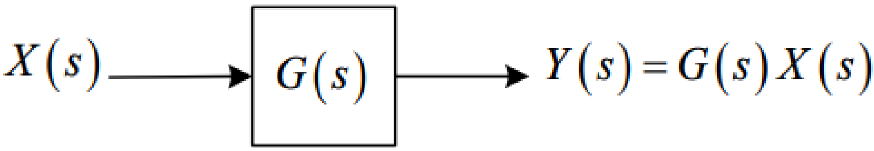




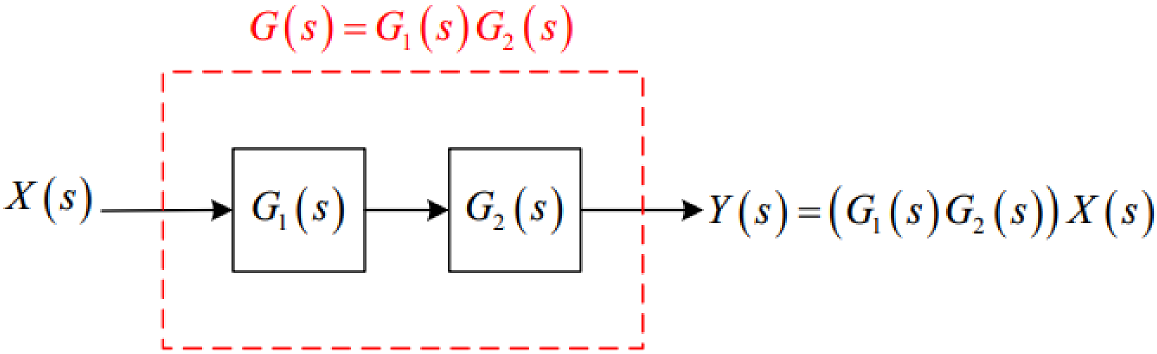
نقطه انشعاب: به این معناست که ورودي به نقطه انشعاب و هر تعداد خروجی از این نقطه یک سیگنال را نشان میدهد.



خروجی هر بلوك برابر ضرب ورودی آن در تابع تبدیل آن بلوك می باشد:



اگر یک سیگنال به دو بلوك پشت سر هم وارد شود، خروجی آن بصورت زیر خواهد بود:



$G(s)$: را که تابع تبدیل مسیر مستقیم است، تابع تبدیل مسیر پیش خورد

$H(s)$: را که تابع تبدیل مسیر معکوس است (از خروجی به ورودي) تابع تبدیل مسیر پس خورد (فیدبک) نامند.

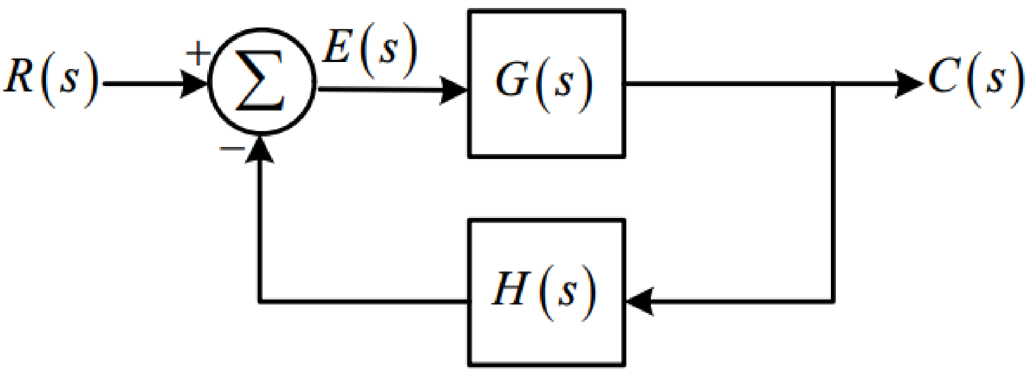
اگر علامت شاخه فیدبک منفی باشد، فیدبک را منفی و اگر مثبت باشد، فیدبک را مثبت گویند.

اگر $H(s) = 1$ باشد، فیدبک را واحد می‌نامند.

سیستم حلقه بسته و محاسبه تابع تبدیل آن از روی نمودار بلوکی

سیستمی را که نمودار بلوکی آن شامل یک حلقه بسته باشد، را سیستم حلقه بسته می نامند.

*شاخه فیدبک برای مقایسه ورودی سیستم و خروجی آن بکار می رود. E(s) که اختلاف ورودی و خروجی است، سیگنال خطا نامیده می شود.



اکنون به محاسبه تابع تبدیل سیستم حلقه بسته می پردازیم. می دانیم که تابع تبدیل یک سیستم نسبت لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودي می باشد، بنابراین:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$C(s) = E(s)G(s)$$

$$E(s) = R(s) - [C(s)H(s)]$$

$$C(s) = \{R(s) - [C(s)H(s)]\}\, G(s)$$

$$C(s) = R(s)G(s) - C(s)H(s)G(s)$$

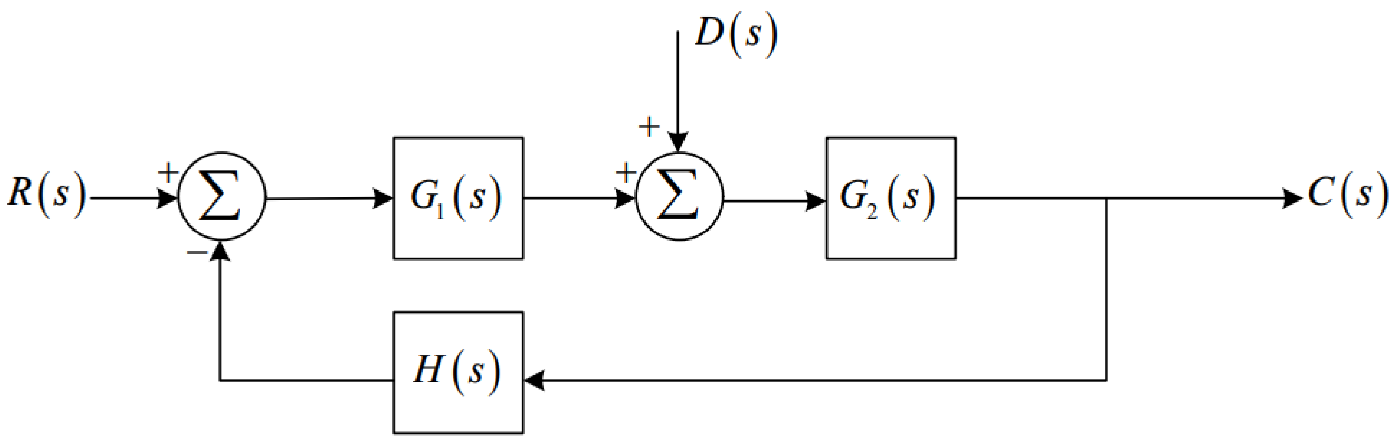
$$C(s) + C(s)H(s)G(s) = R(s)G(s)$$

$$C(s)[1 + H(s)G(s)] = R(s)G(s)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

سیستم حلقه بسته دارای اغتشاش

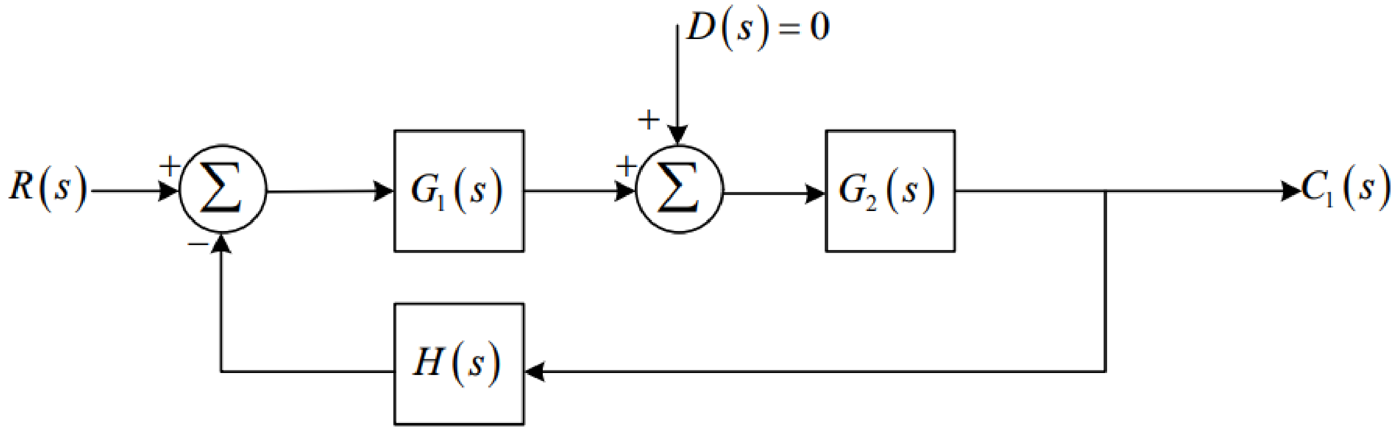
هر سیگنال ناخواسته که به یک سیستم وارد می شود، سیگنال اغتشاش نامیده می شود. این سیگنال نیز در نمودار بلوکی سیستم مدلسازی می شود:



یک سیستم حلقه بسته با اغتشاش مدل شده

از آنجایی که تمام سیستم هایی که در این درس با آن سر و کار داریم، خطی هستند، براي محاسبه تابع تبدیل چنین سیستمی از قانون جمع آثار استفاده می کنیم:

محاسبه تابع تبدیل تنها به ورودی $R(s)$



$$T_1(s)=\frac{C_1(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\rightarrow C_1(s)=\left(\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\right)R(s)$$

منابع:

۲-جزوه استاد هادی توسلی

۳- جزوه استاد راحیل زرگری

پایان جلسه چهارم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان