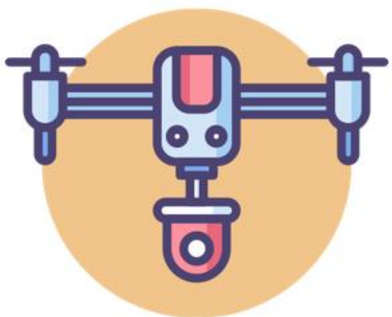
محمد اعرابیان



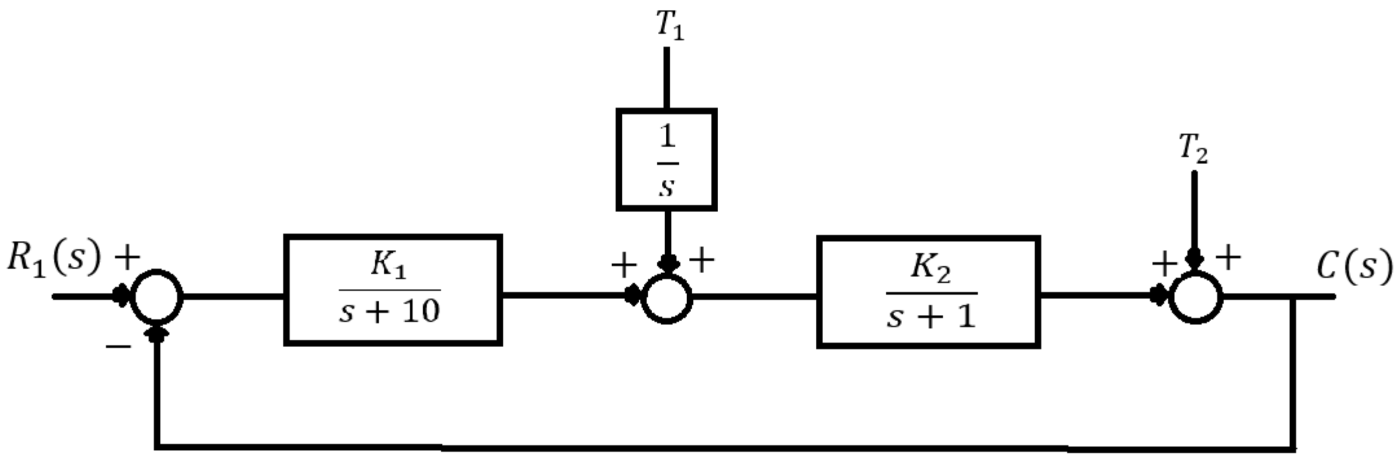
جزوه درس کنترل خطی

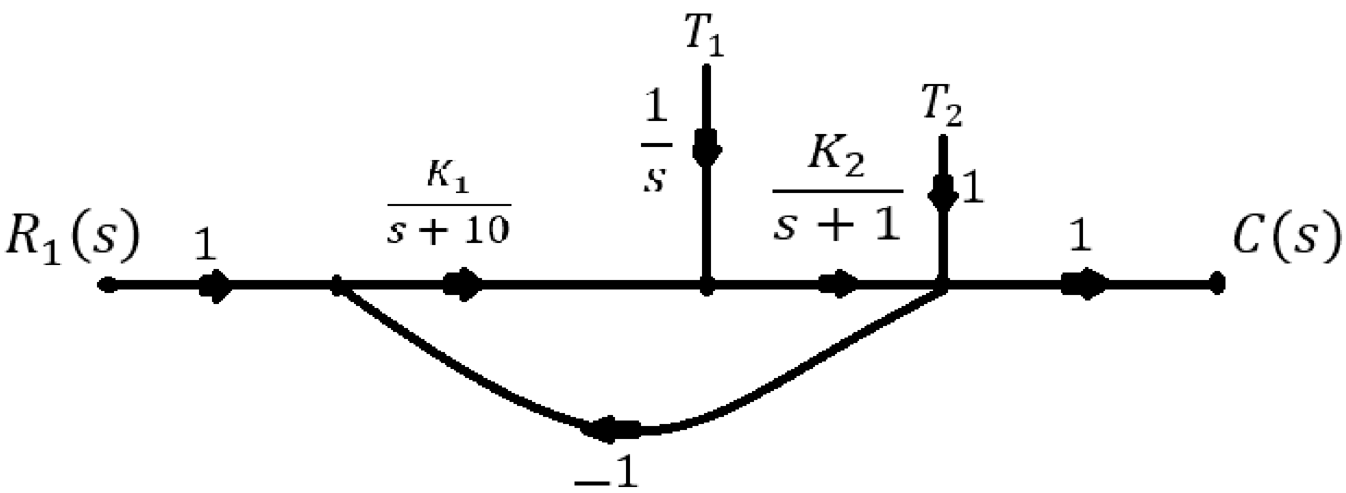
جلسه ششم

برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

مثال: در سیستم کنترلی شکل زیر اگر بخواهیم تاثیر ورودی T_1 و T_2 در خروجی به حداقل برسد، K_1 و K_2 چگونه باید انتخاب شود؟





$$G_1(s) = \frac{C(s)}{T_1}$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{1}{s} \times \frac{K_2}{s+1} \times 1$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$L_1 = \frac{K_1}{s+10} \times \frac{K_2}{s+1} \times -1$$

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + \frac{K_1 K_2}{(s+10)(s+1)}$$

$$G_1(s) = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{K_2}{s(s+1)}}{1+\frac{K_1K_2}{(s+10)(s+1)}}$$

$M_2 = 1 \quad and \quad \Delta_2 = 1$

$$G_2(s) = \frac{M_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1+\frac{K_1K_2}{(s+10)(s+1)}}$$

$$\begin{cases} K_1 \text{ و } K_2 & \Longrightarrow \infty \\ K_2 \Longrightarrow \text{خیلی بزرگ نباشد} \end{cases}$$

تحلیل سیستم های کنترل در حوزه زمان

برای پیداکردن نگرشی نسبت به سیستم، رفتار آن را در حوزه زمان تحلیل می کنیم. برای این منظور سیستم را تحت آزمون قرار می‌دهیم.

سیگنال های تست یا آزمون سیگنال هایی هستند که در سنجش عملکرد سیستم ها کاربرد دارند. مانند:

ورودی پله step : ورودی پله بیانگر تغییر ناگهانی در ورودی مبنا است و کاربرد بسیاری در عمل دارد.

$$r(t) = Ru(t)$$

ورودی شیب Ramp : توانایی پاسخ سیستم را به ورودی که تغییرات آن با زمان ثابت را بررسی می کند.

$$r(t) = Rtu(t)$$

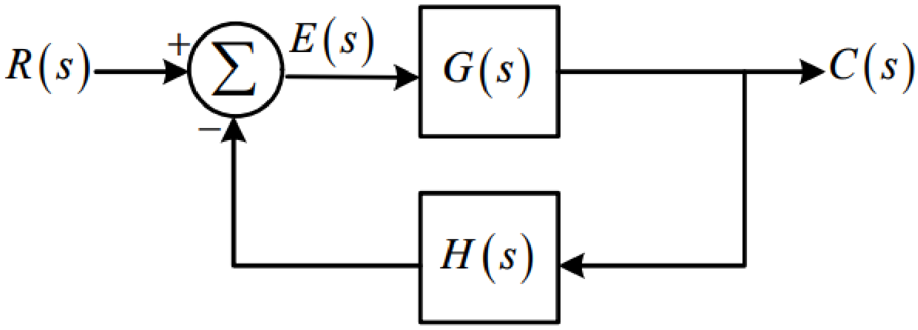
ورودی سهموی: توانایی پاسخ سیستم را به ورودی‌های سریعتر از ramp نشان می دهد.

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2}u(t)$$

ویژگی مشترك این سه سیگنال توصیف ریاضی ساده آنها می باشد.

سیگنال خطا

تفاوت سیگنال ورودی از سیگنال فیدبك را خطا می گویند.



$$E(s) = R(s) - [C(s)H(s)]$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} R(s)$$

$$\left(C(s)H(s)\right) = \left(\frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}\right) R(s)H(s)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)H(s)}{1 + H(s)G(s)} R(s) = R(s)\left(1 - \frac{G(s)H(s)}{1 + H(s)G(s)}\right)$$

$$= R(s)\left(\frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{1 + H(s)G(s)}\right)$$

$$E(s) = R(s)\left(\frac{1}{1 + H(s)G(s)}\right)$$

خطای ماندگار

به اختلاف بین خروجی و ورودی مرجع در حالت پایدار (نهایی) گفته می‌شود.

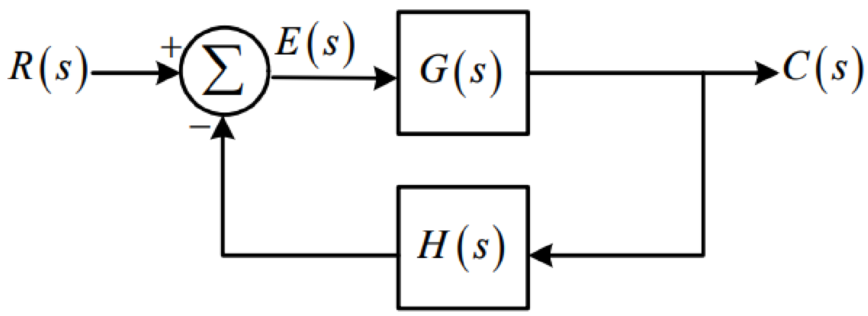
تعریف اول :

$$E(s) = C(s) - R(s)$$

قضیه مقدار نهایی لاپلاس:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} SE(s) = \lim_{s\to 0} S\left(C(s) - R(s)\right)$$

تعریف دوم: روش میسون



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} \Longrightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} SE(s) = \lim_{s\to 0} S\,R(s)\frac{1}{1 + H(s)G(s)}$$

با دقت در فرمول می‌بینیم که خطای حالت دائمی به ورودی بستگی دارد.

$$R(s) = \frac{1}{s} \to e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \to e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\right)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{sG(s)H(s)}\right)$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3} \to e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(\frac{1}{s^{\cancel{3}}}\right)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s^2G(s)H(s)}\right)$$

خلاصه‌ای از روابط فوق در جدول زیر آمده است:

روابط مربوط به خطای حالت دائمی برای سیستم های نوع صفر تا ۲

سیستم	خطای حالت دائمی در پاسخ به		
	ورودی پله	ورودی شیب	ورودی شتاب
نوع صفر	$\frac{1}{1+K_p}, K_P = \lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)$	∞	∞
نوع یک	0	$\frac{1}{K_v}, K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)$	∞
نوع دو	0	0	$\frac{1}{K_a}, K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$

K_p ثابت خطای پله، K_v را ثابت خطای شیب و K_a را ثابت خطای شتاب گویند. در صورتی که فیدبک سیستم واحد باشد.

$$H(s)=1\rightarrow$$

$$E(s)=R(s)-C(s)$$

$$C(s)=\frac{G(s)}{1+\underbrace{H(s)}_{1}G(s)}R(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$$

$$\rightarrow E(s)=R(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)=R(s)\left(1-\frac{G(s)}{1+G(s)}\right)=R(s)\left(\frac{1+\cancel{G(s)-G(s)}}{1+G(s)}\right)=R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)$$

اکنون با توجه به خطای حالت دائمی

$$E(s) = R(s)\left(\frac{1}{1+H(s)G(s)}\right)$$

سیستم نوع N با فیدبک واحد را محاسبه می‌کنیم:

$$E(s) = R(s)\left(\frac{1}{1+\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{S^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}}\right)$$

$$=R(s)\left(\frac{s^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)+k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}\right)$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sR(s)\left(\frac{s^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)+k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}\right)$$

$$K=\frac{p_1p_2\cdots p_m}{k(z_1z_2\dots z_n)}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sR(s)(K s^N) \Rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)$$

بنابراین، خطای حالت دائمی برای سیستم بالا با فیدبک واحد، به ورودی و نوع سیستم بستگی دارد. بهترین حالت برای یک سیستم، داشتن خطای حالت دائمی صفر می باشد، اکنون بسته به نوع سیستم خطای حالت دائمی را به ورودی های پله، شیب و شتاب بررسی می کنیم:

قبل از شروع باید با مفهوم مرتبه و نوع سیستم آشنا شویم.

$G(s)H(s)$ را تابع تبدیل (انتقال) حلقه باز سیستم مي گويند و در حالت كلي مي توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$open\ loop \Longrightarrow G(s)H(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{S^N(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

مرتبه سیستم

$$\text{مرتبه سیستم} = N+n$$

نوع سیستم (type)

به تعداد قطب های تابع تبدیل حلقه باز واقع در مبدا $\underline{N}$ مختصات را نوع سیستم گویند .

مثال: مرتبه سیستم و نوع آن را مشخص کنید.

$$\to GH(s)=\frac{5}{S^4(S+1)} \to \quad \text{نوع ۴ مرتبه ۵}$$

$$GH(s)=\frac{K(1+S)}{S(2+S)(1+\frac{S}{4})} \to \quad \text{نوع یک مرتبه سه}$$

الف) سیستم نوع صفر: اگر سیستم نوع صفر باشد ($N = 0$) ، برای سه ورودی پله، شیب و شتاب

$$R(s)=\frac{1}{s}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{0+1}}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)=K$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{0+1}}\left(\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s}=\infty$$

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{0+1}}\left(\frac{1}{s^{\cancel{3}}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^2}=\infty$$

ب) سیستم نوع یک: اگر سیستم نوع یک باشد($N = 1$)، برای سه ورودی پله، شیب و شتاب

$$R(s)=\frac{1}{s}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}s^{1+\cancel{1}}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)=0$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{1+1}}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\right)=K$$

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{1+1}}\left(\frac{1}{s^{\cancel{3}}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s}=\infty$$

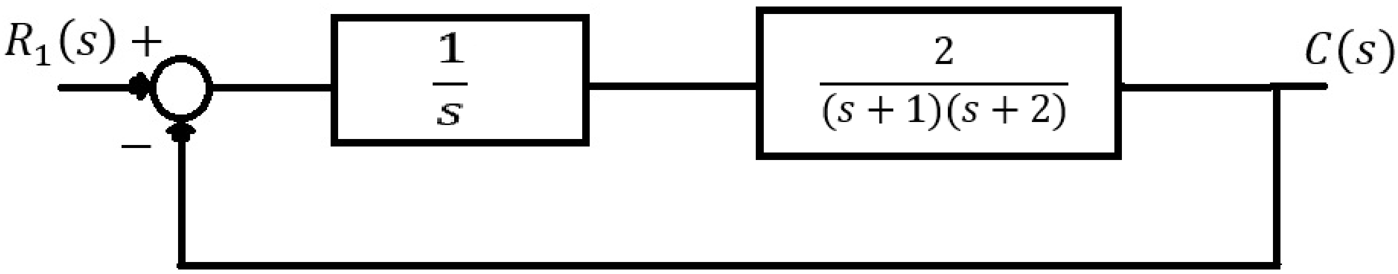
ب) سیستم نوع یک: اگر سیستم نوع دو باشد($N = 2$)، برای سه ورودی پله، شیب و شتاب

$$R(s)=\frac{1}{s}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}s^{2+\cancel{1}}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)=0$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}s^{\cancel{2}+1}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\right)=0$$

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{2+1}}\left(\frac{1}{\cancel{s^3}}\right)=K$$

مثال: خطای ماندگار سیستم زیر به ورودی های پله واحد، شیب واحد و شتاب واحد را بدست آورید.



$$\frac{E(s)}{\mathrm{R(s)}}=\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}\Rightarrow E(s)=R(s)\times\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}$$

خطا ماندگار به ورودی پله:

$$\mathrm{R(s)}=\frac{1}{s}\Rightarrow e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}SE(s)$$

$$\Rightarrow\lim_{s\to 0}S\times\frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}=$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{1}{1}}{\frac{s(s+1)(s+2)+2}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+2}=0$$

خطا ماندگار به ورودی شیب:

$$\mathrm{R(s)}=\frac{1}{s^2}\Rightarrow e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}SE(s)$$

$$\Rightarrow\lim_{s\to 0}S\times\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}$$

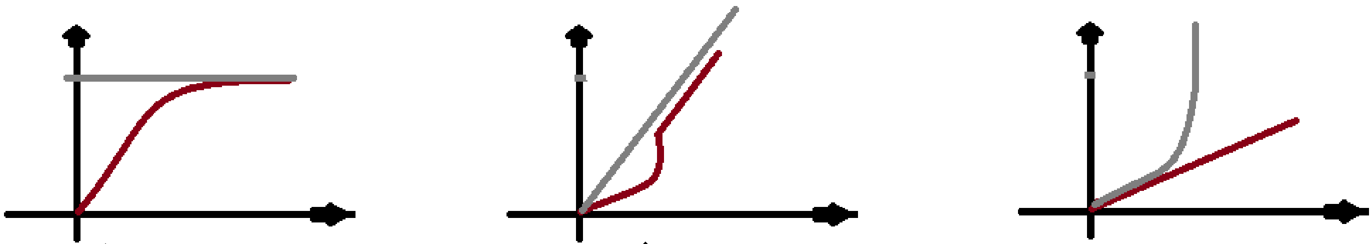
$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+2}=\frac{2}{2}=1$$

خطا ماندگار به ورودی شتاب:

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\Longrightarrow e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}SE(s)$$

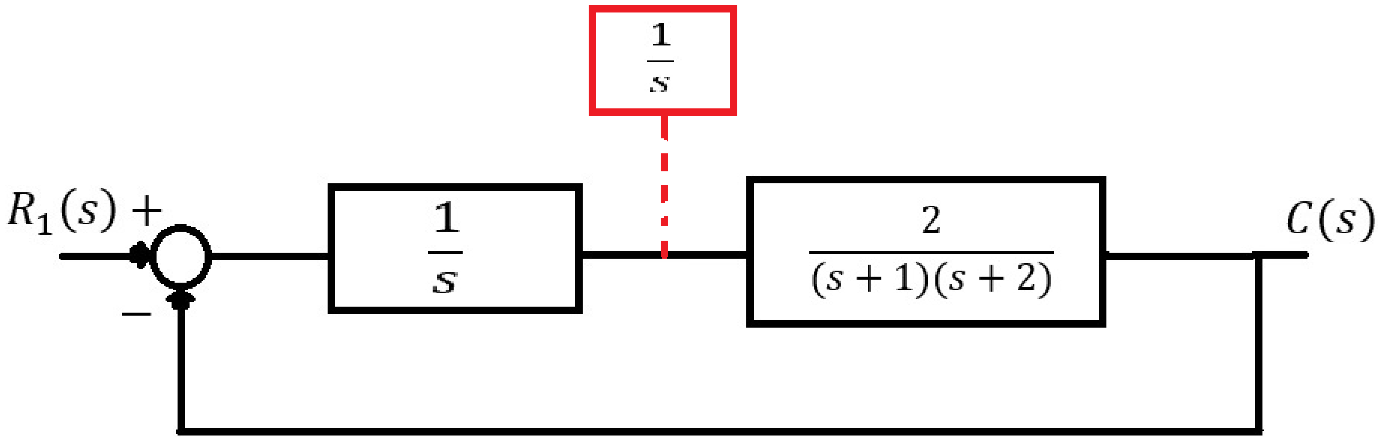
$$\lim_{s\to 0}S\times\frac{1}{s^3}\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+2}=\frac{2}{0}=\infty$$



خطای صفر　　　خطای ثابت　　　خطای بی‌نهایت

برای بهبود سیستم بالا می توان یک انتگرال گیر $\frac{1}{s}$ به سیستم اضافه کرد.

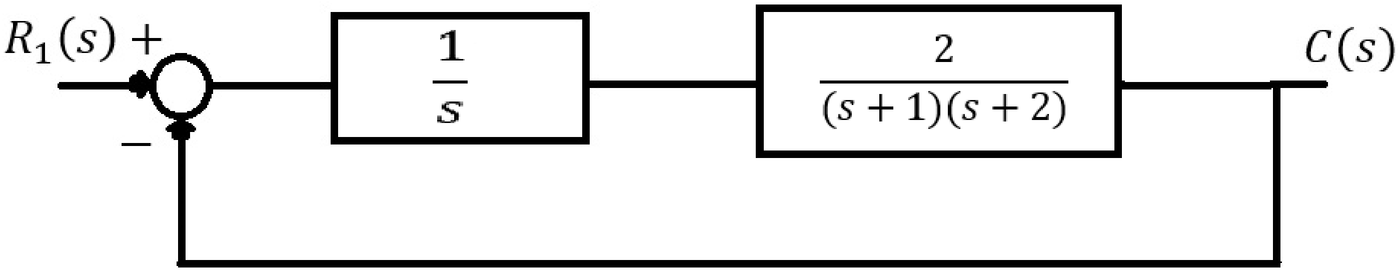


$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\frac{2}{s^2(s+1)(s+2)}}\Longrightarrow E(s)=\frac{R(s)}{1+\frac{2}{s^2(s+1)(s+2)}}$$

خطا به ورودی پله = ۰　　خطا به ورودی شیب = ۰　　خطا به ورودی شتاب = ۱

هرچه نوع سیستم بالاتر باشد سیستم دقیق‌تر شده و خطا به ورودی های مختلف کاهش می‌یابد و هرچه ورودی پیچیده تر باشد نیاز به سیستمی با نوع بالاتر داریم.

مثال: مثال قبل را از تعریف اول بدست آورید.



$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}} = \frac{\frac{2}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+1)(s+2)}} \Rightarrow C(s) = R(s) \times \frac{2}{s(s+1)(s+2)+2}$$

$$E(s) = C(s) - R(s) = R(s) \times \frac{2}{s(s+1)(s+2)+2} - R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(t) = \lim_{\mathrm{s}\to 0} SE(s)$$

خطا ماندگار به ورودی پله:

$$\mathrm{R(s)} = \frac{1}{s} \to e_{ss} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(t) = \lim_{\mathrm{s}\to 0} SE(s) \to \lim_{\mathrm{s}\to 0} S \times \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s(s+1)(s+2)+2} - 1\right) = 0$$

خطا ماندگار به ورودی شیب:

$$\mathrm{R(s)} = \frac{1}{s^2} \to e_{ss} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(t) = \lim_{\mathrm{s}\to 0} SE(s) \Rightarrow \lim_{\mathrm{s}\to 0} S \times \frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{s(s+1)(s+2)+2} - 1\right) = 1$$

زمانی که حد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ رسیدیم از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

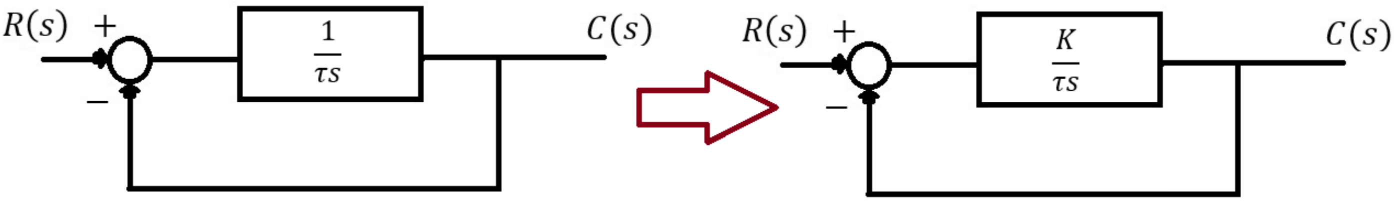
قاعده هوپیتال: از صورت و مخرج مشتق میگیریم و حد را دوباره محاسبه می‌کنیم، اگر دوباره به حالت‌های مبهم بر خورد کردیم کافی است که یک بار دیگر قاعده هوپیتال را اعمال و حد را محاسبه کنید. این عمل را تا محاسبه نهایی حد و رفع ابهام کامل انجام دهید.

خطا ماندگار به ورودی شتاب:

$$\mathrm{R(s)} = \frac{1}{s^3} \to e_{ss} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(t) = \lim_{\mathrm{s}\to 0} SE(s) \to \lim_{\mathrm{s}\to 0} S \times \frac{1}{s^3}\left(\frac{2}{s(s+1)(s+2)+2} - 1\right) = \infty$$

بررسی پاسخ پله سیستم های مرتبه اول:

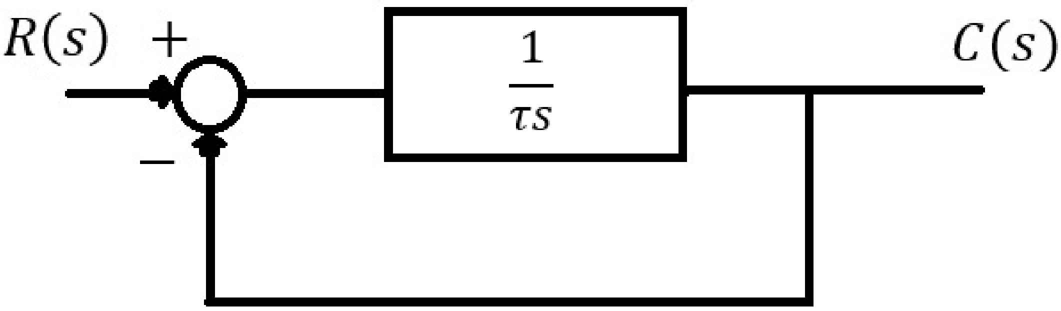
به سیستمی که بالاترین توان S در معادله مشخصه حلقه بسته آن یک باشد.



$\tau =$ ثابت زمانی

یك سیستم مرتبه اول در حالت کلی دارای تابع تبدیل(انتقال) $T(s) = \frac{K}{1+\tau s}$ می باشد.

پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله:



$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}} = \frac{\frac{1}{\tau s}}{1+\frac{1}{\tau s}} \Longrightarrow C(s) = \mathrm{R(s)} \times \frac{1}{1+\tau s}$$

$$\mathrm{R(s)} = \frac{1}{s} \Longrightarrow C(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{1+\tau s} \Longrightarrow C(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+\tau s}$$

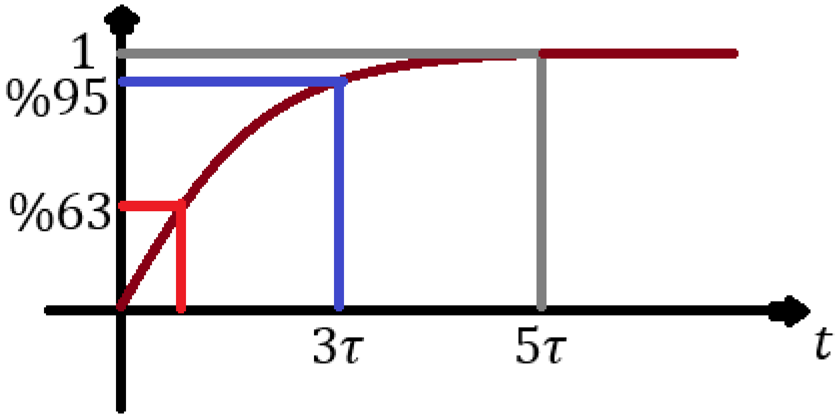
$$A = \lim_{s\to 0} S \times \frac{1}{s(1+\tau s)} = 1$$

$$B = \lim_{s\to \frac{-1}{\tau}} (1+\tau s) \times \frac{1}{s(1+\tau s)} = -\tau$$

$$\frac{1}{s}-\frac{\tau}{1+\tau s}\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\Rightarrow C(t)=u(t)-e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$

$$\left(\frac{\tau\times\frac{1}{\tau}}{(1+\tau s)\times\frac{1}{\tau}}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\tau}+s}\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$

$$C(t)=(1+e^{\frac{-t}{\tau}})u(t)$$



پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی شیب:

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}}=\frac{\frac{1}{\tau s}}{1+\frac{1}{\tau s}}\Rightarrow C(s)=\mathrm{R(s)}\times\frac{1}{1+\tau s}$$

$$\mathrm{R(s)}=\frac{1}{s^2}\Rightarrow C(s)=\frac{1}{s^2}\times\frac{1}{1+\tau s}\Rightarrow C(s)=\frac{1}{s^2(1+\tau s)}$$

$$C(s)=\frac{1}{s^2(1+\tau s)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{1+\tau s}$$

$$A=\lim_{s\to 0}s^2\times\frac{1}{s^2(1+\tau s)}=1$$

$$C=\lim_{s\to\frac{-1}{\tau}}(1+\tau s)\times\frac{1}{s^2(1+\tau s)}=\tau^2$$

برای B به جای S عدد دلخواه قرار می‌دهیم که ریشه مخرج کسر نباشد.

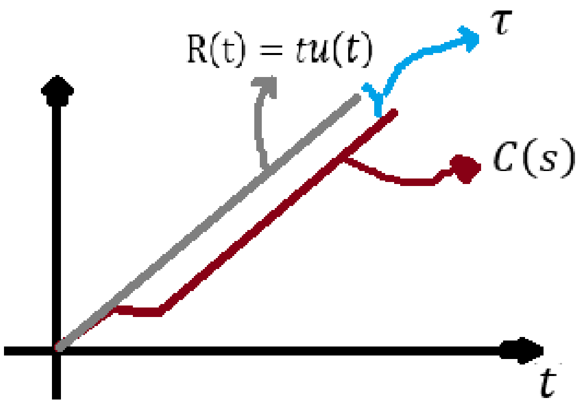
$$s = 1 \Rightarrow \frac{1}{s^2(1+\tau s)} \Rightarrow \frac{1}{1^2(1+\tau 1)} = \frac{1}{1^2} + \frac{B}{1} + \frac{\tau^2}{1+\tau 1}$$

$$B = \frac{-\tau(\tau+1)}{1+\tau} = -\tau$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-\tau}{s} + \frac{\tau^2}{1+\tau s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow C(t) = tu(t) - \tau u(t) + \tau e^{\frac{-t}{\tau}} u(t)$$

$$C(t) = (t - \tau + \tau e^{\frac{-t}{\tau}})u(t)$$



تنها مشخصه قابل توجه در سیستم هاي مرتبه اول زمان صعود آنها می باشد که با ثابت زمانی سیستم متناسب است. اگر يك سیستم مرتبه اول پایدار باشد با تغییر بهره آن ناپایدار نخواهد شد.

اگر يك سیستم مرتبه اول در داخل يك حلقه کنترلی با فیدبك ثابت قرار گیرد، مرتبه اول باقی می ماند و اگر پایدار بوده، پایدار باقی می ماند و ثابت زمانی آن کوچکتر خواهد شد.

در مورد سیستم های مرتبه اول، حدودا $5t$ طول می کشد تا سیستم به مقدار نهایی خود برسد:

$$T_s = 5t$$

پایان جلسه ششم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان