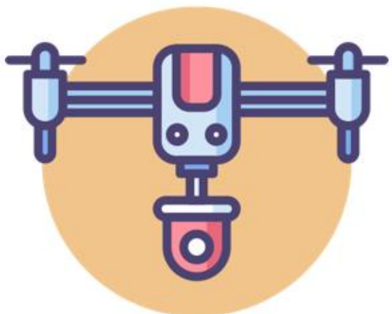
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه هفتم

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

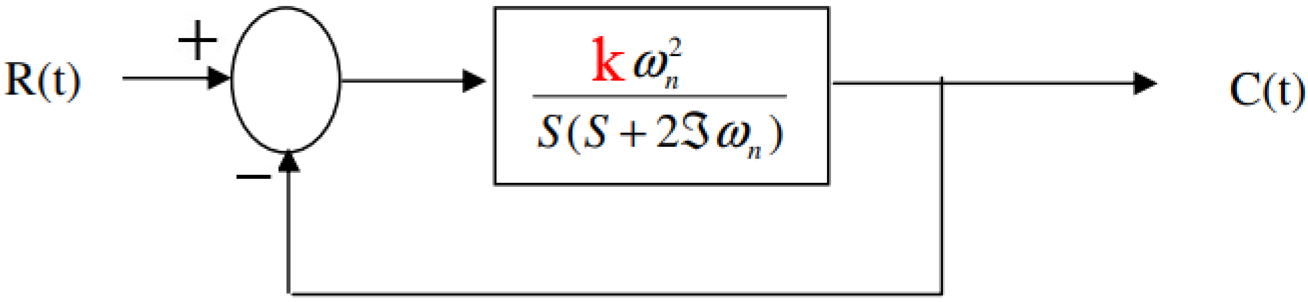
برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

بررسی سیستم های مرتبه دوم

سیستمی مرتبه ۲ گفته می‌شود که معادله مشخصه آن از درجه ۲ باشد، به عبارت دیگر سیستم ۲ قطب حلقه بسته دارد.

بدلیل تشابه بسیاری از سیستم های عملی و تقریب زدن سیستم های دارای درجه بالا، با سیستم های درجه دوم، این سیستم ها از اهمیت خاصی برخوردار هستند هر چند در عمل سیستم های کنترل مرتبه دو نادر می باشند.

سیستم کنترلي مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید :



تابع تبدیل حلقه بسته این سیستم بصورت

$$T(s) = k\frac{\dfrac{\omega_n^2}{S(S+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{S(S+2\zeta\omega_n)}} = \frac{k\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$$

$\zeta =$ نسبت میرایی

$\omega_n =$ سیستم طبیعی نامیراشونده سیستم

$k =$ بهره

$\alpha = \zeta\omega_n =$ ضریب میرایی

بدست آوردن پاسخ به ورودی پله:

نوع پاسخ به محل قطب های سیستم بستگی دارد.

$$S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 = 0$$

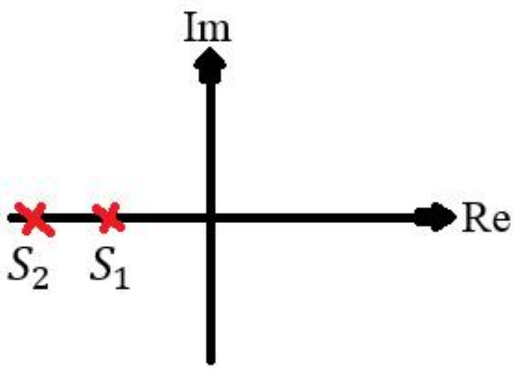
ریشه ها :

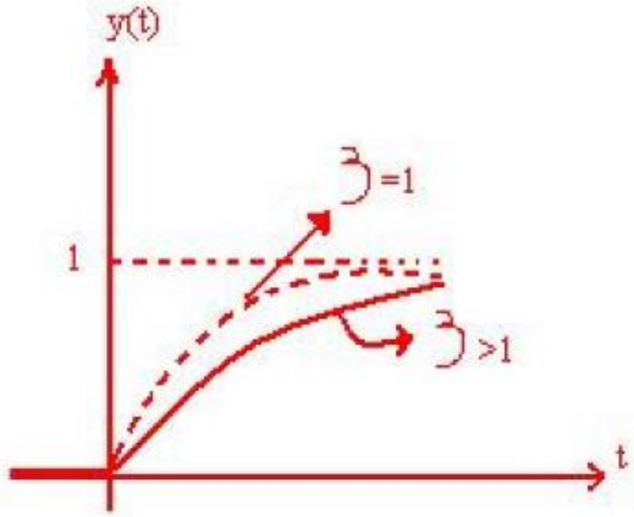
$$S_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$S_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

محل قطب ها را براساس مقادیر مختلف ζ تعیین می‌کنیم

1) حالت فوق میرایی upper damping $\quad \zeta > 1 \quad$ S_2 و $S_1 < 0$

$$S_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$S_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

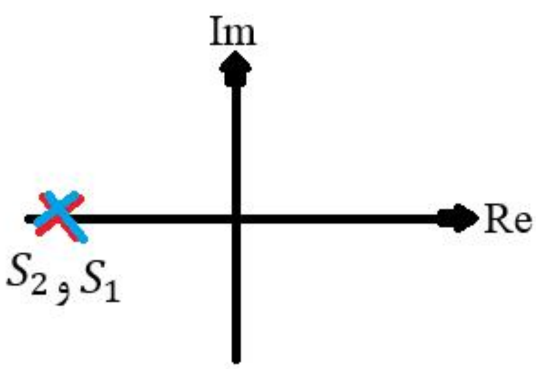


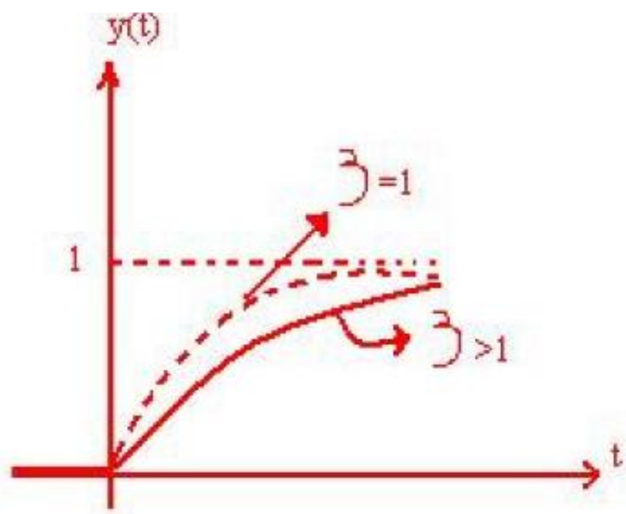


اصلا نوسان نداریم ولی هرچه این میزان بیشتر بود یا زیاد شود، سرعت سیستم کندتر می شود.

پاسخ کلی در حوزه زمان $\Leftarrow$ $\quad C(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_1 t} + k_3$

2) حالت میرای بحرانی $\quad \zeta = 1 \quad$ S_2 و $S_1 = -\zeta\omega_n$





حالت میرایی بحرانی دارای بهترین سرعت در حالت بدون نوسان می‌باشد

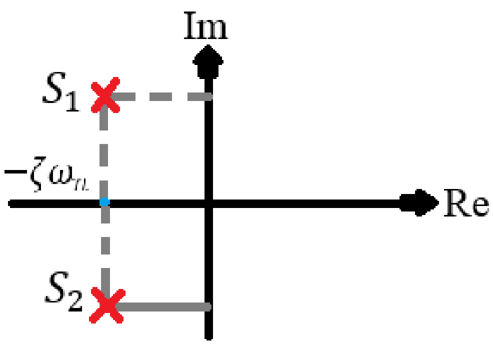
پاسخ کلی در حوزه زمان $\Leftarrow$ $\quad C(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_1 t} + k_3$

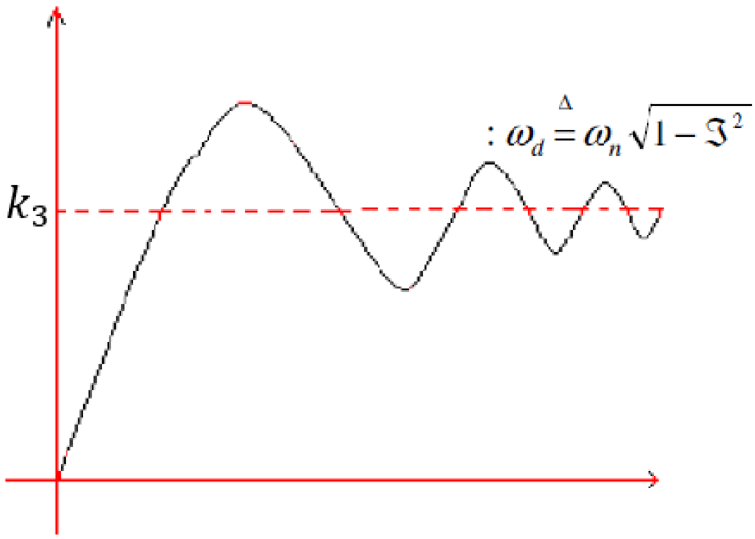
3) حالت زیر میرا یا میرایی ضعیف under damping $\quad 0 < \zeta < 1$

$$S_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$S_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

فرکانس طبیعی میرایی $\Leftarrow$ $\quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



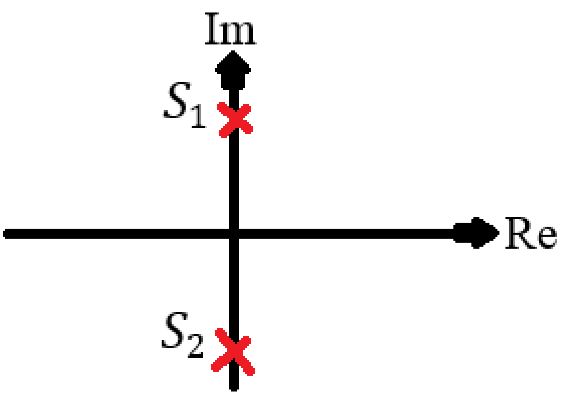


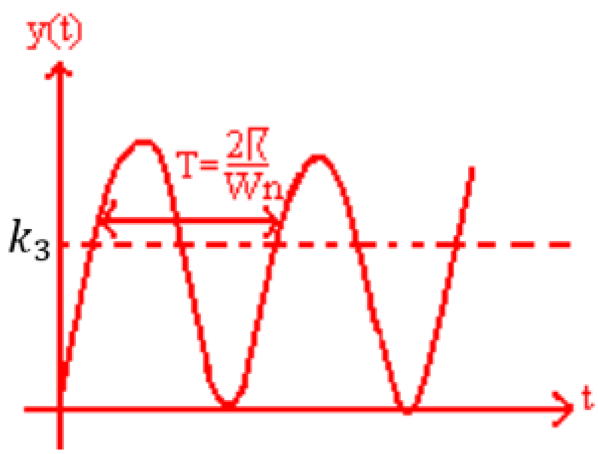
پاسخ کلی در حوزه زمان:

$$C(t) = k_1 e^{-\zeta\omega_n t} cos\omega_d + k_2 e^{-\zeta\omega_n t} sin\omega_d + k_3$$

زمان رسیدن به حالت پایدار زیاد است، اما سرعت راه‌اندازی بالا است.

4) حالت نوسانی نامیرا $\quad \zeta = 0 \quad$ S_2 و $S_1 = \pm j\omega_n$





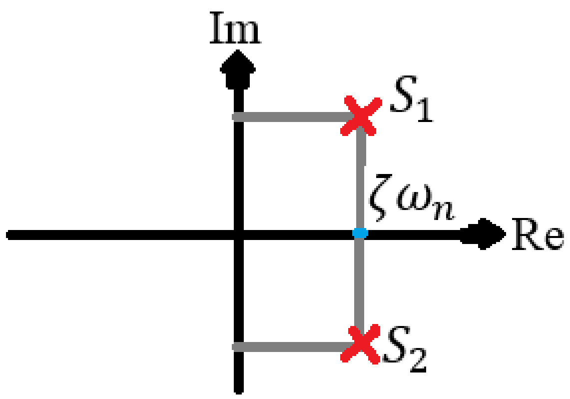
سیستم کاملا نوسانی می شود با فرکانس ω_n

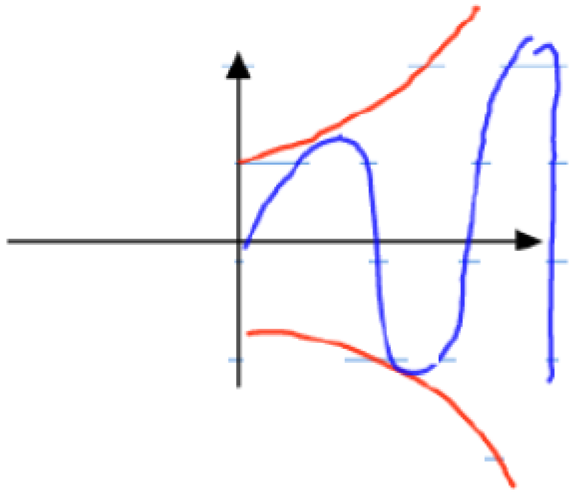
پاسخ کلی در حوزه زمان $\Leftarrow$ $C(t) = k_1 cos\omega_n t + k_2 sin\omega_n t + k_3$

5) حالت ناپایدار $\zeta < 0$

$$S_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$S_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$





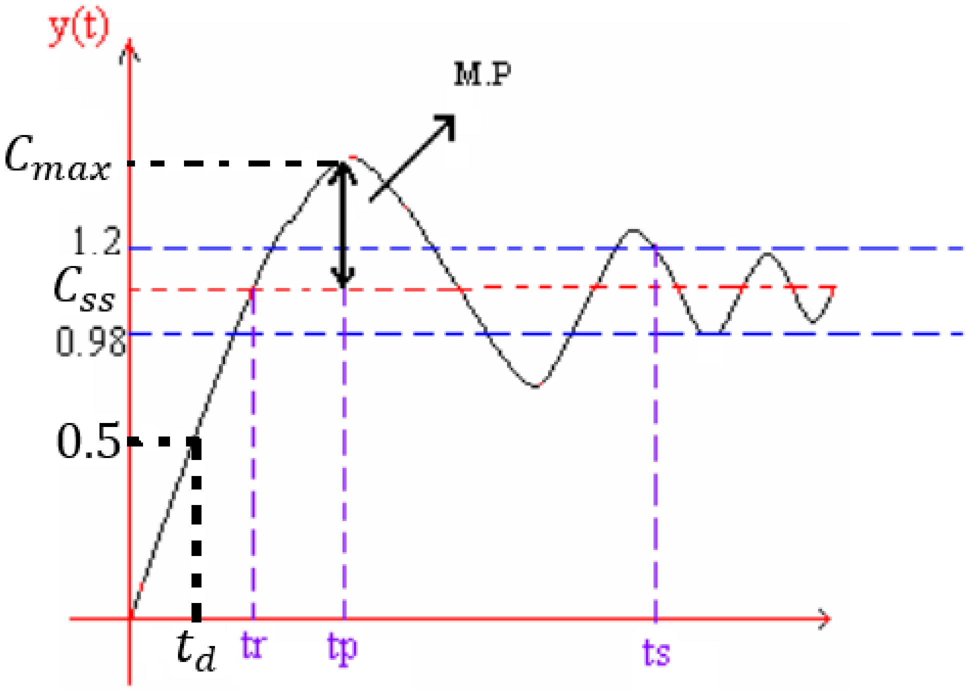
$$C(t) = k_1 e^{-\zeta\omega_n t} cos\omega_d + k_2 e^{-\zeta\omega_n t} sin\omega_d + k_3$$

***بررسی پاسخ میرای ضعیف به ورودی پله در حوزه زمان:** $0 < \zeta < 1$

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}} = \frac{k{\omega_n}^2}{\mathrm{s}^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} \Longrightarrow C(s) = \mathrm{R(s)} \times \frac{k{\omega_n}^2}{\mathrm{s}^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

$$\mathrm{R(s)} = \frac{1}{s} \Longrightarrow C(s) = \frac{1}{s} \times \frac{k{\omega_n}^2}{\mathrm{s}^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \Longrightarrow C(t)$$

پاسخ میرا ضعیف هر سیستم مرتبه ۲ به صورت زیر است.



تعاریف مهم:

۱-زمان تاخیر (t_d): زمانی است که طول می کشد تا پاسخ براي اولین بار به نصف مقدار نهایی خود برسد.

2-زمان صعود (t_r): مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ از صفر تا ۱۰۰ درصد مقدار نهایی خود برسد. (در بعضی از متون ۱۰ %تا ۹۰ %یا ۵ %تا ۹۵ %هم آمده است.)

3-جهش نسبی یا درصد بالا زدگی Over Shoot (M_p): دامنه اولین پیك پاسخ به مقدار نهایي که به صورت درصد بیان مي شود.

٤-زمان اوج (t_p): زمانی است که طول می‌کشد تا خروجی به مقدار حداکثر برسد.

۵-زمان نشست یا استمرار (t_s): زمانی که طول می کشد تا پاسخ به تغییرات قابل قبولی در حدود ٪۲ تا

۵ % مقدار نهایی برسد و در آن محدوده نیز باقی بماند.

٦-مقدار نهایی خروجی (C_{ss}):

٦-حداکثر مقدار خروجی (C_{max}):

زمان تاخیر (t_d):

$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}$$

زمان صعود (t_r):

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d}$$, برحسب رادیان θ ، $\theta^\circ = cos^{-1}\zeta$

فرکانس طبیعی میرایی (ω_d)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

زمان اوج (t_p):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

جهش نسبی یا درصد بالا زدگی Over Shoot (M_p):

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$$ یا $$M_p = e^{-\pi\, cot\theta} \times 100$$

$$M_p = \frac{C_{max}-C_{ss}}{C_{ss}} \times 100$$

زمان نشست یا استمرار (t_s):

$$t_s(\%2) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ ، $$t_s(\%5) = \frac{3.2}{\zeta\omega_n}$$

مقدار نهایی خروجی (C_{ss}):

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} SC(s) = k_3$$

حداکثر مقدار خروجی (C_{max}):

$$C_{max} = C_{ss}(e^{-\pi \cot\theta} + 1)$$

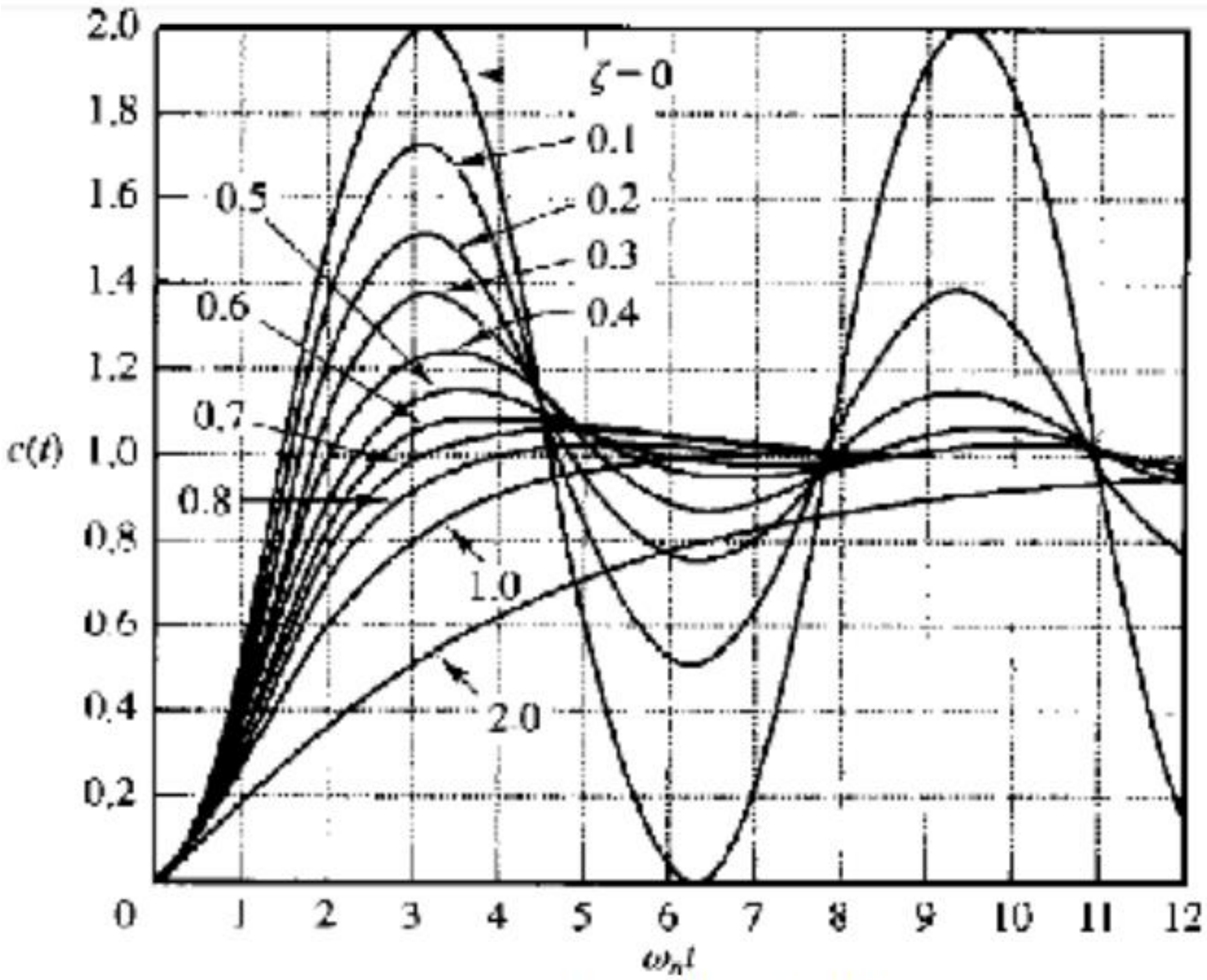
زمان (T)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

نسبت میرایی (ζ) :

$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{{\omega_d}^2}{{\omega_n}^2}} \qquad \text{یا} \qquad \zeta = cos\theta$$

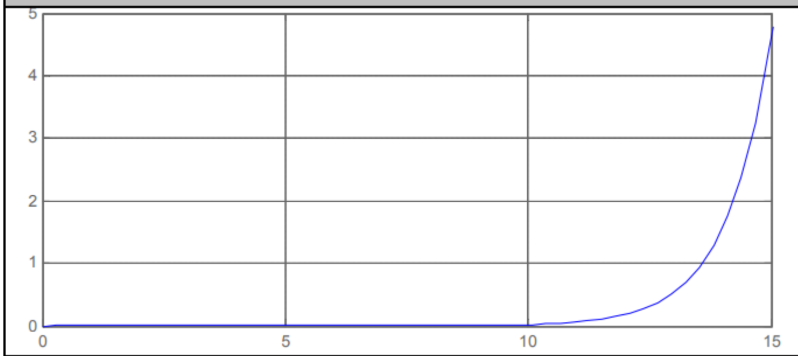
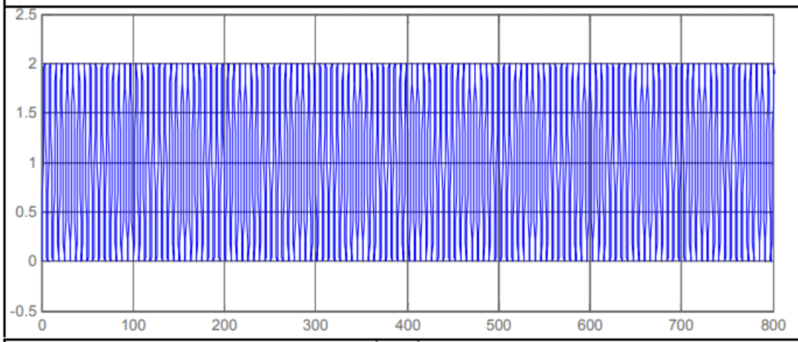
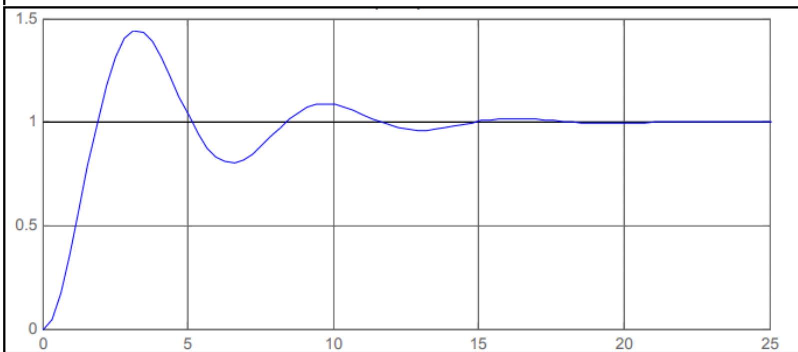
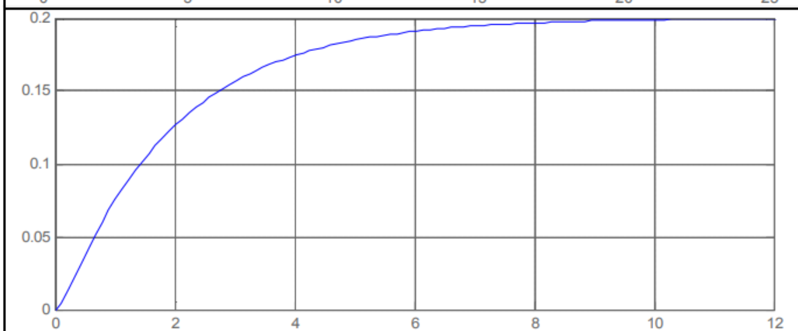
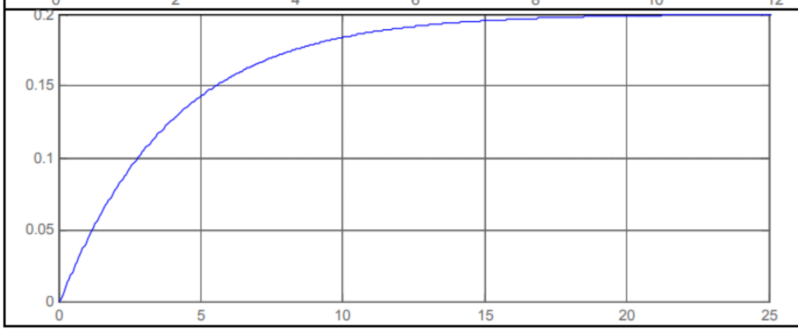
مقدار فراجهش سیستم تنها به پارامتر ζ بستگی دارد. بسته به مقادیر مختلف آن شکل پاسخ سیستم می‌تواند هر یک از شکل‌های زیر باشد:



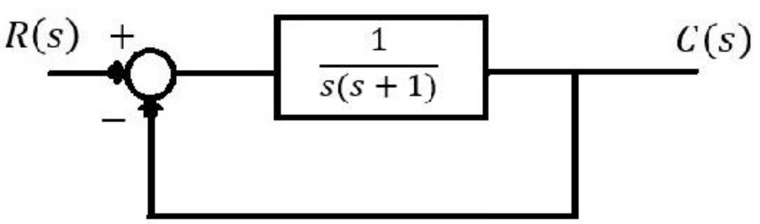
انواع پاسخ پله سیستم مرتبه دوم

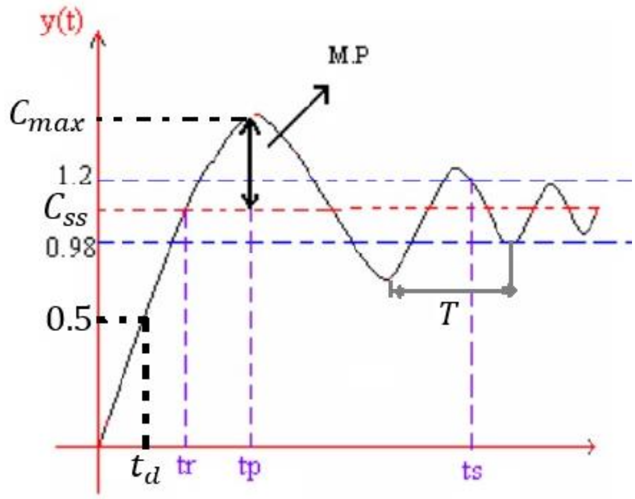
برای درک بهتر رابطه بین ζ و شکل پاسخ سیستم، حالت های مختلف شکل بالا بصورت یک جدول مجزا نمایش داده شده است.

ارتباط بین ζ و نوع پاسخ پله سیستم

شکل عمومی پاسخ	نام و فرم پاسخ	مقدار ζ
	**پاسخ ناپایدار** $y(t)=ke^{c_1 t}u(t), C_1>0$	$\zeta<0$
	**پاسخ نوسانی نامیرا** $y(t)=(k_1\sin C_1 t+k_2\cos C_2 t)u(t)$	$\zeta=0$
	**پاسخ میرای نوسانی** $y(t)=e^{-c_1 t}(k_1\sin C_1 t+k_2\cos C_2 t)u(t)$ $C_1>0$	$0<\zeta<1$
	**پاسخ میرای بحرانی** $y(t)=k\left(1-e^{-c_1 t}u(t)\right), C_1>0$	$\zeta=1$
	**پاسخ میرای شدید** $y(t)=k\left(1-e^{-c_1 t}u(t)\right), C_1>0$	$\zeta>1$

مثال: پاسخ پله سیستم زیر را رسم کنید.





$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}}=\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1+\frac{1}{s(s+1)}}=\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{\frac{s^2+s+1}{s(s+1)}}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$\frac{C(s)}{\mathrm{R(s)}}=\frac{k{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$2\zeta\omega_n=1\Rightarrow\zeta=\frac{1}{2}\qquad,\qquad{\omega_n}^2=1\Rightarrow\omega_n=1$$

$$k{\omega_n}^2=1\Rightarrow k=1$$

$$\omega_d=\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=1\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.85\frac{rad}{s}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{3.14}{0.85}=3.69\ sec$$

برحسب رادیان $\theta\Rightarrow\theta=cos^{-1}\zeta=cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\ rad$

$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{0.85}=2.4\ sec$$

$$C_{max} = C_{ss}\left(e^{-\pi\, cot\theta} + 1\right) = 1(e^{-\pi\, cot60°} + 1) = 1.16$$

$$M_p = e^{-\pi\, cot\theta} \times 100 = e^{-\pi\, cot60°} \times 100 = \%16$$

$$t_s(\%2) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\ sec \text{ ، } t_s(\%5) = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} = \frac{3.2}{\frac{1}{2}} = 6.4\ sec$$

$$t_d = \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n} = \frac{1 + \left(0.7 \times \frac{1}{2}\right)}{1} = 1.35\ sec$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{0.85} = 7.4 \Longrightarrow F = \frac{1}{T} = \frac{1}{7.4} = 0.135Hz$$

تمرین: برای مثال بالا مقدار ζ چنان بدست آورید که $M_p = \%10$ باشد.

برای محاسبه ζ از M_p بدون درصد استفاده می‌کنیم.

یعنی: $M_p = 0.1$

$$M_p = e^{-\pi\, cot\theta} \Longrightarrow 10 = e^{-\pi\, cot\theta}$$

$$Ln\left(M_p\right) = -\pi\ cot\theta \Longrightarrow cot\theta = \frac{Ln\left(M_p\right)}{-\pi} \Longrightarrow tan\theta = \frac{1}{\frac{Ln\left(M_p\right)}{-\pi}}$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{1}{\frac{Ln\left(M_p\right)}{-\pi}} \qquad , \qquad \zeta = cos\theta$$

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}(x) &\Leftrightarrow&& x &= \cos(\theta) \\ \theta &= \sin^{-1}(x) &\Leftrightarrow&& x &= \sin(\theta) \\ \theta &= \tan^{-1}(x) &\Leftrightarrow&& x &= \tan(\theta) \end{aligned} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مثال: یک موتور DC با تابع تبدیل حلقه باز

$$G(s)=\frac{v_\theta(s)}{V(s)}=\frac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.01}$$

را در نظر بگیرید. پارامترهای پاسخ گذرا را برای این سیستم حلقه بسته شامل فیدبک واحد محاسبه نمایید؟

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم:

$$T(s)=\frac{\frac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.01}}{1+\frac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.01}}=\frac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.02}$$

$$\Rightarrow\times 200\Rightarrow\frac{2}{s^2+1.2s+4}$$

مقادیر میرایی و فرکانس طبیعی بدست می آیند:

$$s^2+1.2s+4\equiv s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\rightarrow\begin{cases}2\zeta\omega_n=1.2\\ \omega_n^2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\zeta=0.3\\ \omega_n=2\end{cases}\rightarrow\omega_d=1.9$$

با توجه به مقدار ζ پاسخ، میرای نوسانی خواهد بود. اکنون پارامترهای پاسخ گذرای مربوطه را محاسبه می کنیم:

$$t_d\cong\frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}=0.605$$

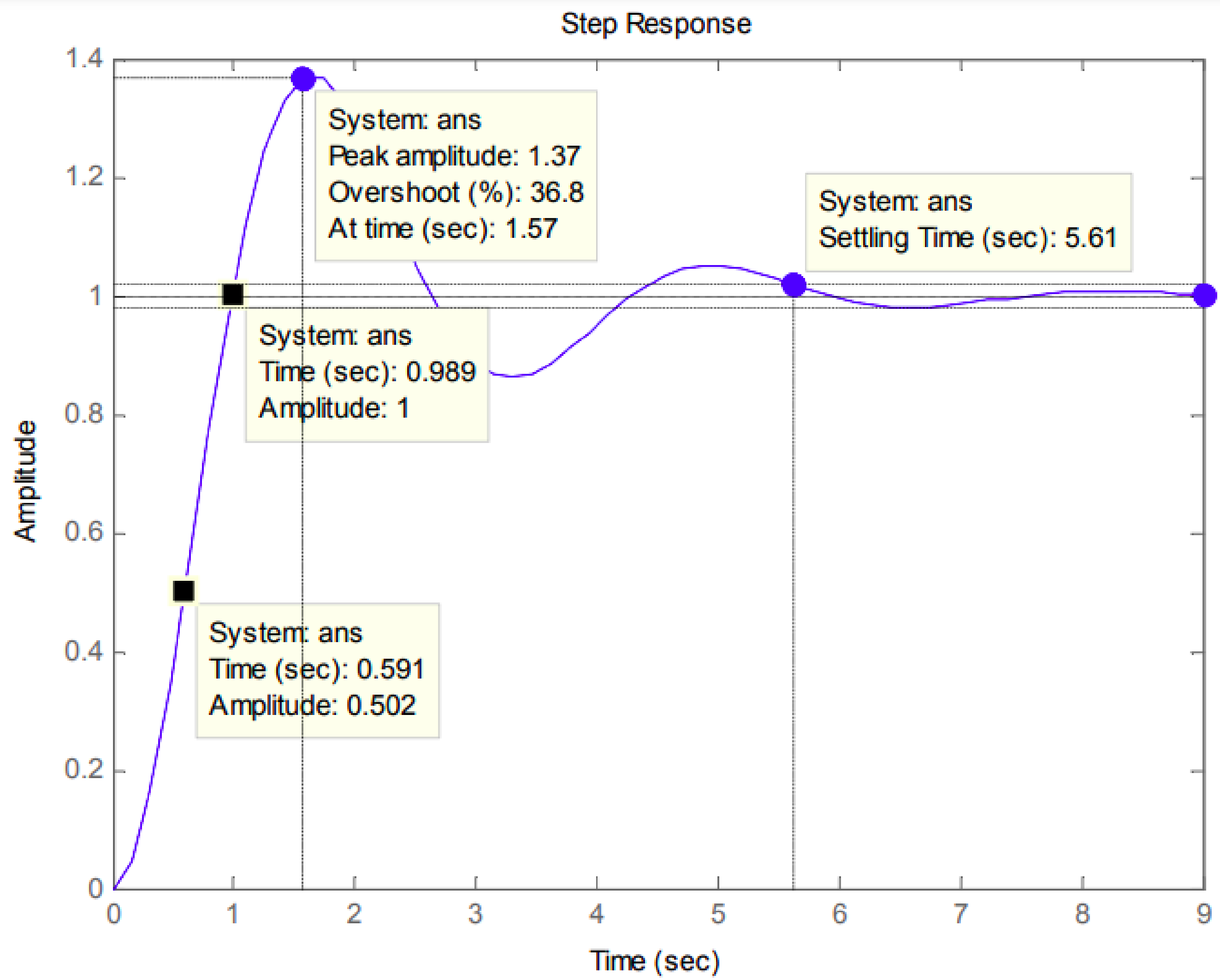
$$t_r=\frac{\pi-\cos^{-1}\zeta}{\omega_d}=\frac{\pi-\overbrace{\cos^{-1}0.3}^{1.26}}{\omega_d}=0.98$$

$\cos^{-1}\zeta$ برحسب رادیان محاسبه گردد.

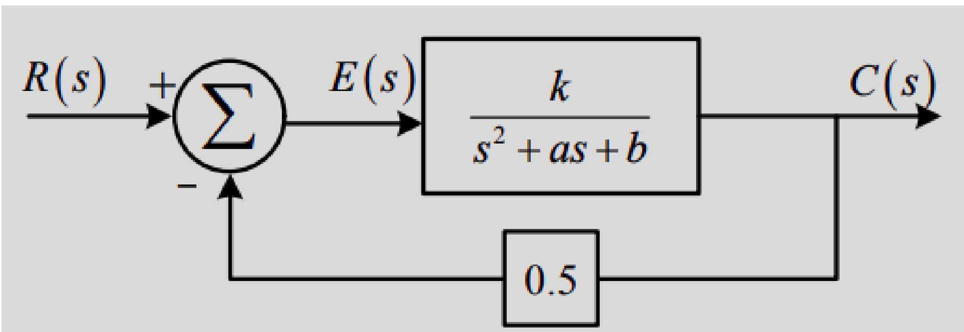
$$t_P=\frac{\pi}{\omega_d}=1.64$$

$$M_P=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100=37\%$$

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=6.67$$



مثال: در سیستم زیر پارامترهای مجهول را بگونه‌ای بیابید که $\boldsymbol{e_{ss}(\infty) = 1}$, $\boldsymbol{t_s(\%2) < 1\,\text{sec}}$, $\boldsymbol{M_p > \%5}$ باشد؟



ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم:

$$T(s) = \frac{\dfrac{k}{s^2+as+b}}{1+\dfrac{0.5k}{s^2+as+b}} = \frac{k}{s^2+as+(b+0.5k)}$$

مقادیر میرایی و فرکانس طبیعی بدست می آیند:

$$s^2+as+(b+0.5k)\equiv s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \to \begin{cases}2\zeta\omega_n=a\\ \omega_n^2=(b+0.5k)\end{cases}$$

$$M_P=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100>5\to e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}>0.05\to \ln\left(e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)>\ln(0.05)\ ;\ -3$$

$$\to -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}>-3\to\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}<3\to\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2<9$$

$$\to\pi^2\zeta^2<9(1-\zeta^2)=9-9\zeta^2\to\zeta^2<\frac{9}{9+\pi^2}\to\boxed{0<\zeta<0.69}\to\zeta=0.5$$

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}<1\to 0.5\omega_n>4\to\boxed{\omega_n>8}\to\omega_n=9$$

سیستم نوع صفر است، تنها به ورودی پله می تواند خطای حالت دائمی ثابت داشته باشد:

$$\mathrm{R(s)}=\frac{1}{s}\Longrightarrow e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}SE(s)$$

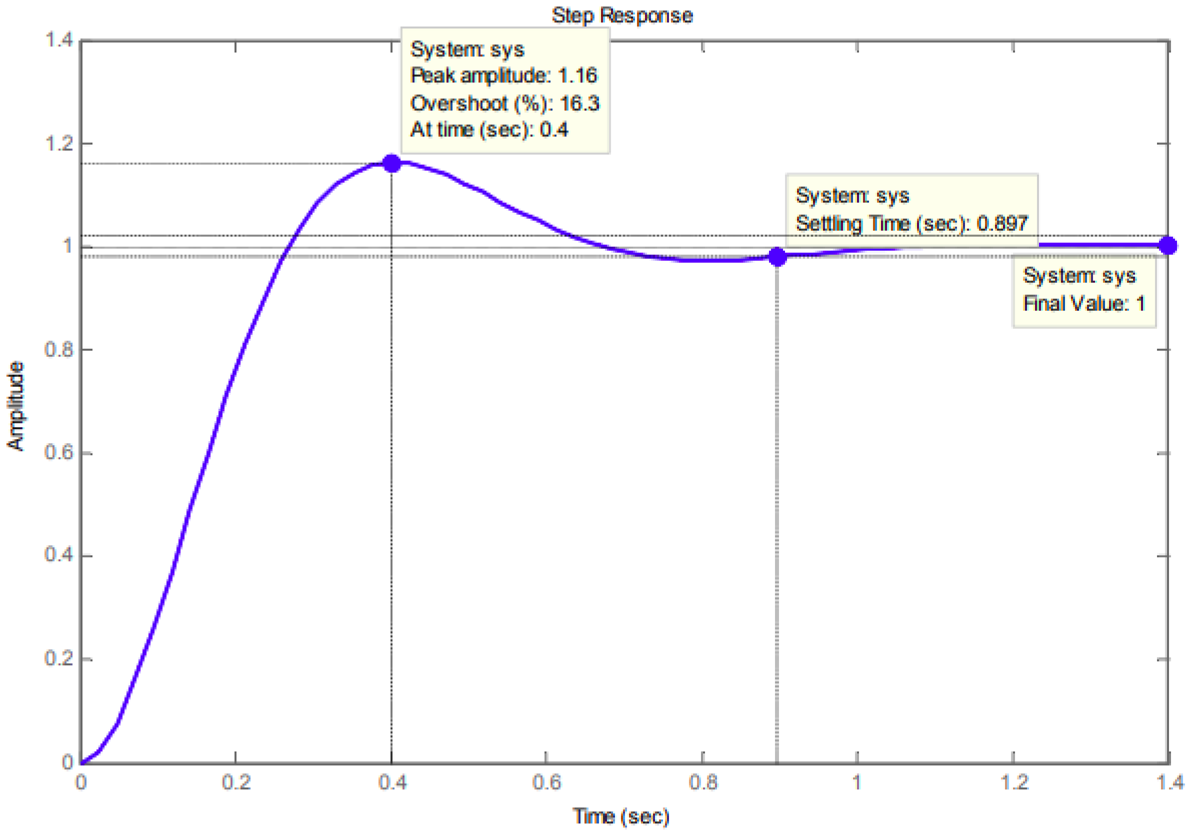
$$E(s)=R(s)\times T(s)$$

$$\lim_{s\to 0}sR(s)T(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\times\frac{1}{\cancel{s}}\left(\frac{k}{s^2+as+(b+0.5k)}\right)=\frac{k}{(b+0.5k)}=1$$

$$\to k=b+0.5k\to 0.5k=b\to k=2b$$

$$\begin{cases}2\zeta\omega_n=a\\ \omega_n^2=(b+0.5k)\end{cases}\to\begin{cases}2\times0.5\times9=a\\ \omega_n^2=(b+0.5k)\end{cases}\to\begin{cases}a=9\\ 81=b+0.5(2b)\end{cases}\to\begin{cases}a=9\\ b=40.5\\ k=81\end{cases}$$

پاسخ پله این سیستم در صفحه بعد رسم شده است. مشخصات زمانی پاسخ گذرای این سیستم همانطور که در شکل هم دیده می شود، با مشخصات مطلوب همخوانی دارد.



سیستم های مرتبه بالاتر:

تحلیل سیستم های مرتبه بالاتر، به دلیل پیچیدگی روابط موجود به راحتی سیستم های مرتبه یک و دو نبوده و معمولاً برای بررسی چنین سیستم هایی بجز مواردی که بتوان مرتبه سیستم را کاهش داد، از روش های دستی استفاده نمی شود .اگر موقعیت قطبی نسبت به دیگر قطب های سیستم پنج تا ده برابر متفاوت باشد، (پنج تا ده برابر بزرگتر یا کوچکتر) می توان تاثیر آن در تابع تبدیل را حذف نمود.

نکته: مقدار تابع تبدیل یک سیستم در فرکانس صفر یعنی S=0 را بهره DC سیستم گویند. در ساده سازی تابع تبدیل یک سیستم بهره DC سیستم نباید تغییر کند.

مثال:

$$\begin{cases} G(s)=\dfrac{10}{(s+10)(s^2+2s+2)} \\ DC\,Gain: G(0)=\dfrac{10}{10\times 2}=0.5 \end{cases} \rightarrow G'(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$$

پایان جلسه هفتم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان