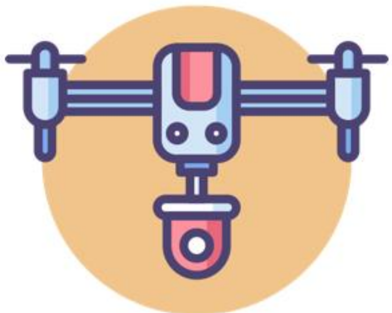
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه هشتم

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

پایداری سیستم هایی کنترل خطی

تعریف پایداری در مورد سیستم های مختلف خطی، غیرخطی، متغیر با زمان و نامتغیر با زمان فرق می‌کند.

در این فصل فقط به تحلیل پایداری سیستم‌های تغییر ناپذیر با زمان خطی (LTI) می‌پردازیم.

بررسی پایداری با توجه به شرایط اولیه (پاسخ ورودی به صفر)

پایداری: اگر خروجی سیستم به ازای هر شرایط اولیه نهایتا صفر شود، سیستم را به طور مجانبی پایدار گویند.

پایداری مرزی (حاشیه ای): اگر به ازای برخی از شرایط اولیه، خروجی صفر نشود و در عین حال به ازای هیچ مقدار اولیه‌ای بی‌نهایت نیز نگردد. در این صورت سیستم را پایدار مرزی می‌گویند.

ناپایدار: هرگاه به ازای برخی از شرایط اولیه، خروجی سیستم نامحدود شود، سیستم را ناپایدار گویند.

بررسی پایداری با توجه به ورودی (پاسخ حالت صفر)

پایداری: چنانچه به ازای هر ورودی محدود، خروجی سیستم محدود شود، سیستم دارای پایداری ورودی محدود- خروجی محدود می باشد. (BIBO)

پایداری مرزی: در صورتی که خروجی سیستم فقط به ازای بعضی از ورودی ها که شامل فرکانس های طبیعی سیستم هستند نامحدود گردد و برای سایر فرکانس ها، خروجی محدود بماند، سیستم پایدار مرزی می‌باشد.

ناپایدار: چنانچه بتوان یك ورودی محدود را طوری انتخاب نمود که شامل فرکانس های طبیعی نباشد ولی خروجی را نامحدود کند، و یا به ورودی محدود خروجی نا محدود دهد در این صورت سیستم را ناپایدار می‌گویند.

بررسی پایداری با توجه به پاسخ ضربه h(t) :

فرض کنید که پاسخ ضربه یك سیستم (LTI) را با h(t) نمایش دهیم. در این صورت:

پایداری: سیستم پایدار است اگر $\lim_{t\to\infty} h(t) \to 0$

پایداری مرزی: سیستم پایدار مرزی است اگر $\lim_{t\to\infty} h(t) < \infty$

ناپایدار: سیستم ناپایدار است اگر $\lim_{t\to\infty} h(t) \to \infty$

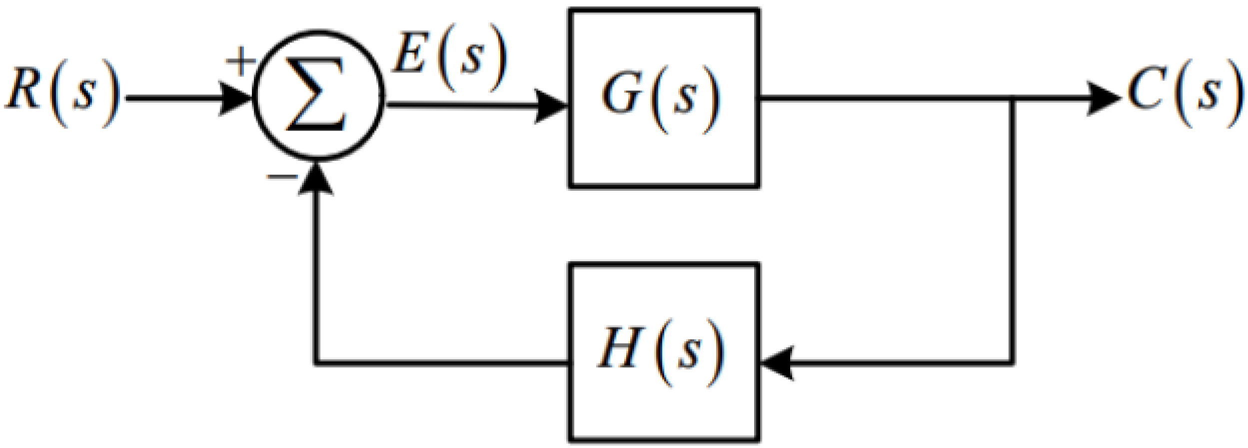
بررسی پایداری سیستم های کنترل (LTI) با توجه به محل قطب های تابع تبدیل حلقه بسته

پایداری: اگر تمامی قطب های تابع تبدیل حلقه بسته در سمت چپ محور موهومی واقع شوند، سیستم پایدار است.

پایدار مرزی: اگر تمامی قطب های تابع تبدیل حلقه بسته به جز تعدادی قطب ساده بر رويي محور موهومی همگی در سمت چپ محور موهومی باشند ، در این صورت سیستم را پایدار مرزی می‌گویند.

ناپایدار: اگر تابع تبدیل حلقه بسته دارای قطبی در سمت راست و یا قطب مضاعف بر روی محور موهومی باشد در این صورت سیستم را ناپایدار می‌گویند.

برای سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان کلی زیر، ریشه های معادله مشخصه که همان قطب های تابع تبدیل (انتقال) حلقه بسته سیستم می‌باشند نقش اساسی را در تحلیل پایداری بازی می‌کنند.



$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

$$\Delta(s) = 1 + H(s)G(s) = 0$$

معیار پایداری راث، هرویتز ($\boldsymbol{method\ hurwitz - Roth}$)

فرض کنید معادله مشخصه سیستم بصورت زیر باشد:

$$\Delta(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

برای استفاده از معیار بالا، ابتدا بایستی جدول زیر که به جدول راث معروف است را تکمیل کنیم.

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^{n} & \alpha_{n} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \cdots\cdots \\
s^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \cdots\cdots \\
\hline
s^{n-2} & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\
s^{n-3} & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\
s^{n-4} & . & . & . & \\
\vdots & . & . & & \\
s^{0} & . & & &
\end{array}
$$

$$A_1 = \frac{\alpha_{n-1}.\alpha_{n-2} - \alpha_n.\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{\alpha_{n-1}.\alpha_{n-4} - \alpha_n.\alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

$$A_3 = \frac{\alpha_{n-1}.\alpha_{n-6} - \alpha_n.\alpha_{n-7}}{\alpha_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1}A_2}{A_1}$$

$$B_2 = \frac{A_1\alpha_{n-5} - \alpha_{n-1}A_3}{A_1}$$

$$B_3 = \frac{A_1\alpha_{n-7} - \alpha_{n-1}A_4}{A_1}$$

یا :

$$\Delta(s) = \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\hline
s^{n-2} & \underbrace{\dfrac{a_1\times a_2 - a_0\times a_3}{a_1}}_{A_1} & \underbrace{\dfrac{a_1\times a_4 - a_0\times a_5}{a_1}}_{A_2} & \underbrace{\dfrac{a_1\times a_6 - a_0\times a_7}{a_1}}_{A3} & \cdots \\
s^{n-3} & \dfrac{A_1\times a_3 - A_2\times a_1}{A_1} & \dfrac{A_1\times a_5 - A_3\times a_1}{A_1} & \dfrac{A_1\times a_5 - A_3\times a_1}{A_1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^{0} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

برای پایداری سیستم با معادله مشخصه گفته شده بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

a. (معیار هرویتز) شرط لازم برای پایداری سیستم مذکور این است که تمامی ضرایب معادله مشخصه موجود و هم علامت باشند.

b. شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم مذکور این است که تمامی ضرایب ستون اول جدول موجود و هم علامت باشد.

قضیه(شر ط لازم و کافی برای پایداری): بعد از محاسبه عناصر جدول راث با استفاده از نتایج زیر می‌توان در مورد پایداری نظر داد:

1- اگر کلیه ضرایب ستون اول جدول غیر صفر و هم علامت باشند، در این صورت سیستم پایدار است.

2- چنانچه ضرایب ستون اول هم علامت نباشند، در این صورت به تعداد تغییر علامت در ستون اول، قطب سمت راست محور موهومی خواهیم داشت.

مثال: در مورد پایداري سیستم های زیر نظر دهید و در صورت ناپایدار بودن تعداد قطب هاي سمت راست آن را تعیین کنید؟

$$\Delta(S) = S^4 + 2S^3 + 3S^2 + 4S + 5 = 0$$

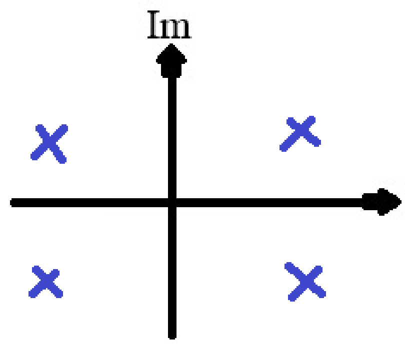
S^4	1	3	5
S^3	2	4	

$\Rightarrow$

S^4	1	3	5
S^3	1	2	

براي راحتی سطر s^3 بر دو تقسیم شده است.

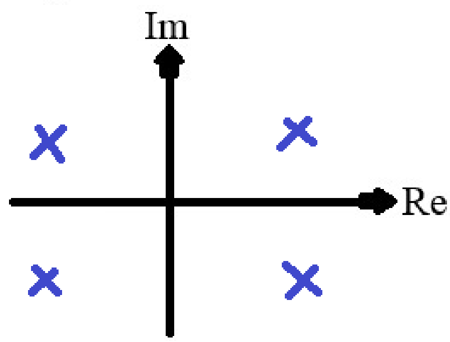
S^4	+	1	3	5
S^3	+	1	2	
S^2	+	$\cancel{\frac{1\times3-1\times2}{1}}$ 1	$\cancel{\frac{1\times5-1\times0}{1}}$ 5	
S^1	−	$\cancel{\frac{1\times2-1\times5}{1}}$ -3		
s^0	+	$\cancel{\frac{-3\times5-1\times0}{-3}}$ 5		



در ستون اول جدول راث ۲ تغییر علامت داریم لذا سیستم فوق نا پایدار بوده و دو ریشه در سمت راست محور موهومی دارد.

$$F(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 - s + 1$$

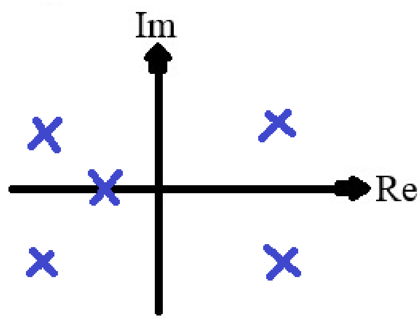
s^4	$+$	1	2	1	
s^3	$+$	3	-1	0	
s^2	$+$	2.3	1		
s^1	$-$	-2.3			
s^0	$+$	1			



سیستم با ۲ قطب سمت راست ناپایدار است.

$$F(s) = s^5 + 2s^4 + s^2 + 2s + 2$$

s^5	$+$	1	0	2	0
s^4	$+$	2	1	2	0
s^3	$-$	$-\frac{1}{2}$	1	0	
s^2	$+$	5	2		
s^1	$+$	1.2	0		
s^0	$+$	2	0		



سیستم با ۲ قطب سمت راست ناپایدار است.

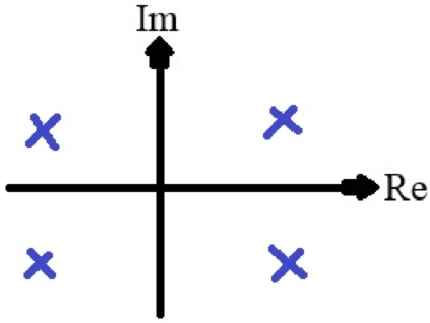
حالات خاصی که ممکن است در جدول راث رخ دهد بصورت زیر می باشد.

حالت ۱) در این حالت اولین عنصر یك سطر صفر می‌شود، در حالی که حداقل یك عنصر غیر صفر در همان سطر وجود دارد، در این حالت برای رفع این مشکل مقدار مثبت کوچکی مانند ε به صفر نسبت داده و بقیه جدول را کامل می‌کنیم.

مثال: در مورد پایداری نظر دهید و در صورت ناپایداری تعداد قطب های سمت راست آن را تعیین کنید؟

$$F(s) = s^4 + 3s^2 + 2s + 1$$

$$\begin{array}{c|c|ccc}
s^4 & + & 1 & 3 & 1 \\
s^3 & + & \cancel{0}\ \varepsilon & 2 & 0 \\
\hline
s^2 & - & \dfrac{3\varepsilon - 2}{\varepsilon} & 1 & \\
s^1 & + & \dfrac{2\left(\dfrac{3\varepsilon - 2}{\varepsilon}\right) - \varepsilon}{\dfrac{3\varepsilon - 2}{\varepsilon}} & & \\
s^0 & + & 1 & &
\end{array}$$



سیستم با ۲ قطب سمت راست ناپایدار است.

$$F(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$$

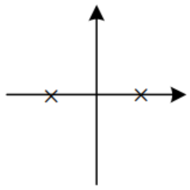
$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
\hline
s^3 & 2\times\left(\dfrac{\cancel{2\times3-6\times1}\ \varepsilon}{2}\right) & 2\times\left(\dfrac{2\times5-3\times1}{2}\right) & 0 \\
s^2 & & & \\
s & & & \\
1 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|ccc}
s^5 & & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & & 2 & 6 & 3 \\
\hline
s^3 & + & \varepsilon & 7 & 0 \\
s^2 & - & \varepsilon\times\underbrace{\left(\dfrac{\varepsilon\times6-7\times2}{\cancel{\varepsilon}}\right)}_{6\varepsilon-14 \approx -14} & \varepsilon\times\underbrace{\left(\dfrac{\varepsilon\times3-0}{\cancel{\varepsilon}}\right)}_{3\varepsilon} & \\
s & + & \underbrace{\dfrac{-14\times7-3\varepsilon^2}{-14}}_{\approx 7} & 0 & 0 \\
1 & + & 3\varepsilon & &
\end{array}$$

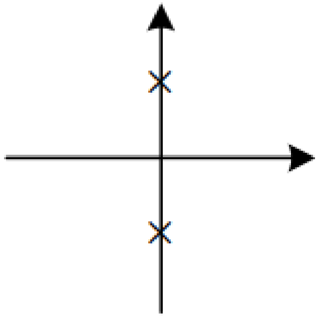
سیستم با ۲ قطب سمت راست ناپایدار است.

حالت ۲) در این حالت یکی از سطرهای جدول راث کاملا صفر می شود و ممکن است شامل یکی از حالات زیر باشد.

1- معادله حداقل يك جفت ريشه حقيقی مساوی و مختلف العلامه دارد.

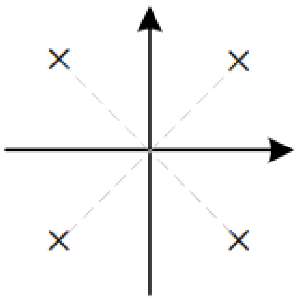


2- معادله حداقل يك جفت ريشه موهومی محض داشته باشد.



ریشه ها در سمت راست صفحه (بخش ناپایدار) قرار ندارند. به این حالت پایدار مرزی می‌گوییم.

3- معادله ریشه های مزدوج مختلط دارد که نسبت به مبدا صفحه S متقارن می باشند.



در این حالت تمامی عناصر سطرm ام (m فرد است) صفر می‌شود و چند جمله‌ای درجه زوجی که از درایه‌های سطر بالای، سطر صفر شده تشکیل شده و آن را با P(s) نشان می‌دهیم نقش اساسی را بازی می‌کند.

P(s) را چند جمله ای کمکی می نامند. بعد از مواجه شدن با مشکل مطرح شده بصورت زیر عمل می‌کنیم

۱) تشکیل چند جمله ای کمکی P(s)
۲) مشتق گیری از P(s)
۳) ضرایب مشتق P(s) را به جای سطر صفر شده می گذاریم.
٤) روند عادی جدول راث را دنبال می‌کنیم.

کلیه ریشه هایی که نسبت به مبدا مختصات تقارن داشته و باعث ایجاد پدیده فوق شده اند، ریشه های معادله کمکی P(s) می‌باشند.

مثال: در مورد پایداری نظر دهید و در صورت نا پایداری تعداد قطب های سمت راست آن را تعیین کنید؟

$$F(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2$$

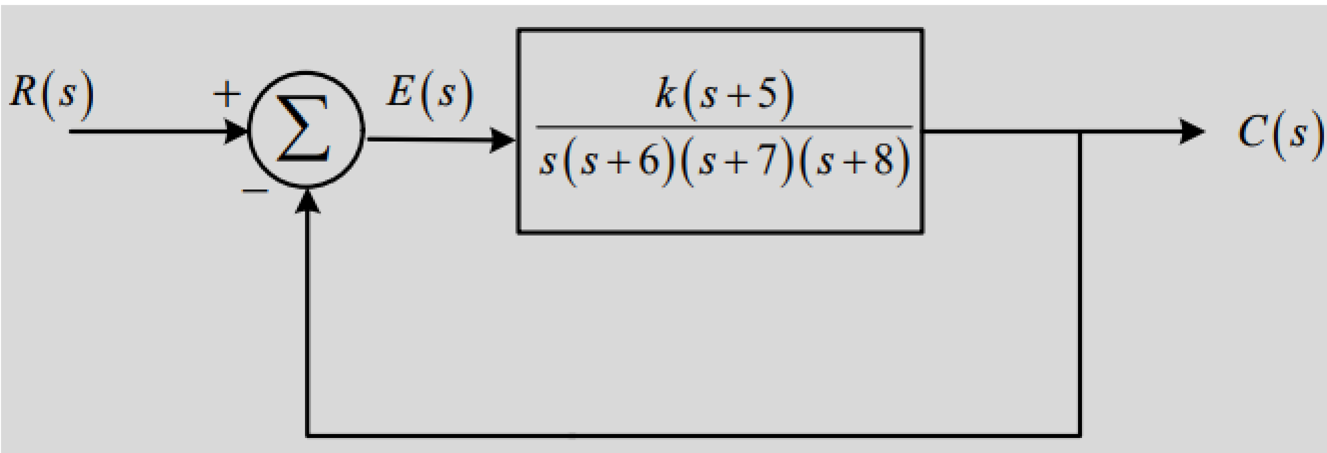
	S^5	1	0	-1
$\frac{1}{2}\times$	S^4	1	0	-1
	S^3	4	0	
	S^2	ε	-1	
	S^1	$4/\varepsilon$		
	0	-1		

$p(s) = s^4 - 1$

$p'(s) = 4s^3$

یك تغيير علامت در ستون اول جدول راث داريم لذا يك ريشه در سمت راست داريم و سيستم ناپايدار است.

مثال: مقدار k را طوري تعيين كنيد كه خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر ١٠٪ باشد:



برای بررسی خطای حالت دائمی ابتدا باید پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد، به منظور بررسی پایداری ابتدا معادله مشخصه را محاسبه نموده و جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)}}{1+\dfrac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)}}=\frac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)}$$

$$\rightarrow \Delta(s)=s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)=s^4+21s^3+146s^2+(336+k)s+5k$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 146 & 5k \\
s^3 & 21 & (336+k) & 0 \\
\hline
s^2 & \dfrac{\overbrace{21\times146-(336+k)}^{2730-k}}{\cancel{21}} & \dfrac{\overbrace{21\times5k}^{105k}}{\cancel{21}} & 0 \\
s & \dfrac{(2730-k)\times(336+k)-105k\times21}{2730-k} & 0 & 0 \\
1 & 105k & 0 & 0
\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2730-k>0 \\ (2730-k)\times(336+k)-125k\times21>0 \\ 105k>0 \end{cases}$$

برای تعیین علامت معادله دوم ابتدا باید ریشه های آن بدست آید:

$$-k^2-231k+917280=0 \rightarrow k=-1080.1,849.1$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & -1080.1 \quad\quad 849.1 & \\
\hline
- & + & -
\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k<2730 \\ -1080.1<k<849.1 \rightarrow 0<k<849.1 \\ k>0 \end{cases}$$

اکنون مقدار k را برای رسیدن به خطای حالت دائمی ۱۰٪ محاسبه می کنیم. مقدار k بدست آمده باید در شرط فوق صدق کند.

چون که سیستم با فیدبک واحد است از فرمول خطا زیر استفاده می‌کنیم.

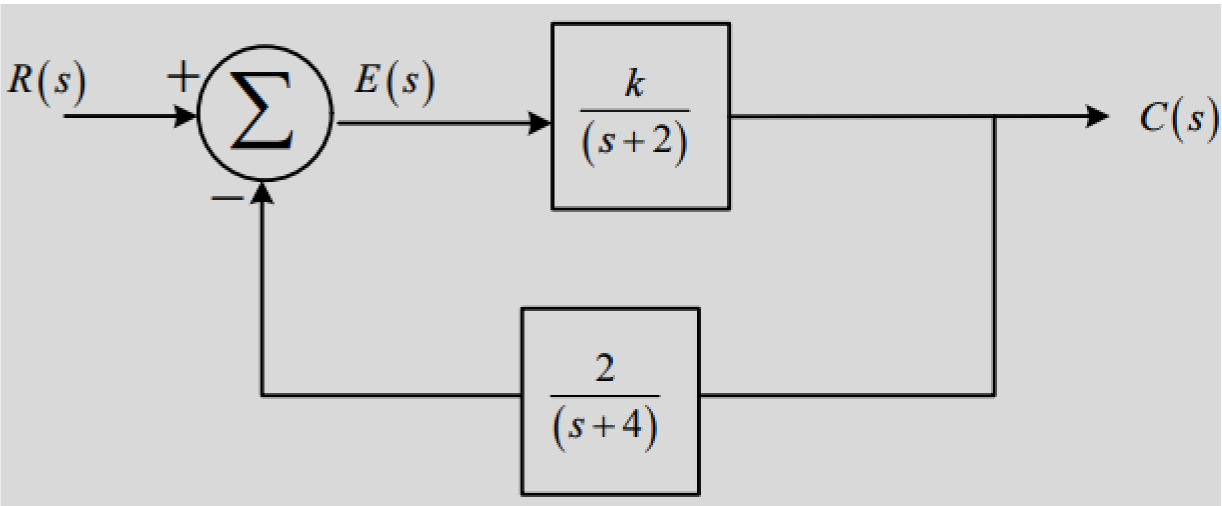
$$\begin{cases} R(s)=\dfrac{1}{s^2} \\ G(s)=\dfrac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)} \end{cases} \rightarrow E(s)=R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)}}\right)$$

$$\rightarrow E(s)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{s(s+6)(s+7)(s+8)}{s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)}\right)$$

$$\rightarrow e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s^2}}\left(\frac{\cancel{s}(s+6)(s+7)(s+8)}{s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)}\right)=\frac{336}{5k}$$

که این مقدار در شرط $0 < K < 849.1$ صدق می کند بنابراین این مقدار قابل قبول است.

مثال: مقدار k را طوری تعیین کنید که خطای حالت دائمی به ورودی پله 0.02 باشد:



برای بررسی خطای حالت دائمی ابتدا باید پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد، به منظور بررسی پایداری ابتدا معادله مشخصه را محاسبه نموده و جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{k}{(s+2)}}{1+\dfrac{k}{(s+2)}\dfrac{2}{(s+4)}}=\frac{k(s+4)}{(s+2)(s+4)+2k}$$

$$\rightarrow \Delta(s)=(s+2)(s+4)+2k=s^2+6s+(8+2k)$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 8+2k \\ s & 6 & 0 \\ \hline 1 & 8+2k & 0 \end{array} \qquad \rightarrow 8+2k>0 \rightarrow k>-4$$

اکنون مقدار k را برای رسیدن به خطای حالت دائمی 0.02 محاسبه می کنیم. مقدار k بدست آمده باید در شرط فوق صدق کند.

$$\begin{cases} R(s)=\dfrac{1}{s} \\ GH(s)=\dfrac{2k}{(s+2)(s+4)} \end{cases} \rightarrow K_p=\lim_{s\to 0} GH(s)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{2k}{(s+2)(s+4)}\right)=\frac{k}{4}$$

$$\rightarrow e_{ss}(\infty)=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+\frac{k}{4}}=\frac{4}{k+4}=0.02 \rightarrow 0.02k=4-4\times 0.02 \rightarrow k=195$$

که این مقدار در شرط $K > -4$ صدق می کند، بنابراین این مقدار قابل قبول است.

چند نکته درباره ریشه ها جدول راث زمانی که یک سطر صفر می‌شود:

۱ – اگر هیچ تغییر علامتی در ستون اول نداشته باشیم یعنی هیچ ریشه ای سمت راست نداریم، بنابراین ریشه‌های معادله کمکی که نسبت به مبداء متقارن هستند باید بر روی محور $j\omega$ قرار گیرند و بقیه ریشه‌ها نیز سمت راست محور $j\omega$ می‌باشند، در این حالت سیستم پایداری مرزی دارد.

۲- در صورتی که بعد از سطر صفر شده تغییر علامتی در ستون اول داشته باشیم، معادله کمکی به تعداد تغییر علامت ریشه سمت راست دارد و به دلیل تقارن با مبداء به همان تعداد ریشه سمت چپ باید داشته باشد.بقیه ریشه‌های مکمی نیز باید بر روی محور $j\omega$ قرار گیرند. تغییر علامتی که قبل از سطر صفر شده اتفاق بیفتد نشان می‌دهد که معادله مشخصه ریشه‌هایی سمت راست دارد که این ریشه‌ها به معادله کمکی ربطی ندارد.

۳- اگر در ادامه جدول راث باز هم به سطر کاملا صفر بر خورد کردیم به این معنی است که ریشه‌های متقارن تکراری هستند در این صورت باز هم سیستم ناپایدار است.

پایان جلسه هشتم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان