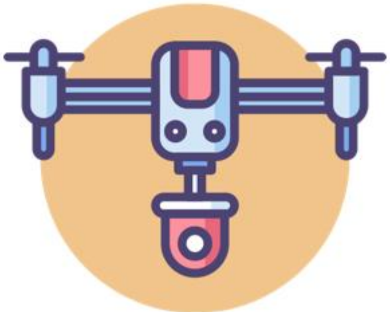
محمد اعرابیان



جزوه درس کنترل خطی

جلسه نهم

برای جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ۱۴۰۰

بررسی پایداری سیستم های کنترلی

مقدمه: در فصل گذشته یکی از روش‌های بررسی پایداری سیستم های کنترلی را آموختیم.

در روش روث – هورویتز، تنها پایداری مطلق یک سیستم را می توان بررسی نمود. سه روش باقیمانده که در این فصل آموزش داده می شوند، برای بررسی پایداری مطلق و نسبی بکار می روند.

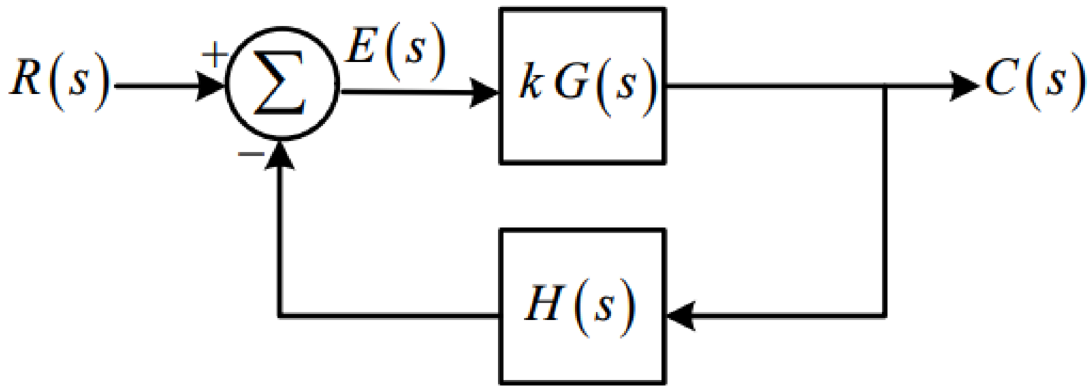
سه روش مکان ریشه ها، دیاگرام نایکوئیست و نمودارهای بودی، سه روش اصلی و اساسی تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی به شمار می روند.

بررسی پایداری به روش مکان ریشه ها

همانطور که در بخش قبل دیدیم، مشخصات اساسی پاسخ گذرای یک سیستم حلقه بسته، به محل قطب های آن وابسته است. اگر سیستم بهره متغیری داشته باشد، محل قطب های حلقه بسته به مقدار بهره انتخاب شده برای حلقه بستگی خواهند داشت. پس دانستن این که با تغییر بهره حلقه محل قطب های حلقه بسته در صفحه s چگونه تغییر می‌کند برای مهندسین طراح بسیار مهم است.

از دید طراحی، در بعضی از سیستم‌ها یک اصلاح ساده بهره می تواند قطب‌های حلقه بسته را به محل مطلوب ببرد. به این ترتیب مسئله طراحی به انتخاب مناسب بهره حلقه می انجامد. اگر اصلاح بهره به تنهایی نتواند به نتیجه مطلوب منجر شود، افزودن یک جبرانساز به سیستم ضروری خواهد بود.

در روش مکان ریشه ها ، ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته به ازای یک پارامتر مجهول که معمولاً بهره سیستم است، رسم می گردند. بار دیگر دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته را در نظر بگیرید:



معادله مشخصه چنین سیستمی بصورت زیر خواهد بود.

$$T(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} \rightarrow \Delta(s)=1+KG(s)H(s)=0$$

بنابراین همانطور که مشخص است، جایگاه ریشه های حلقه بسته به مقدار K بستگی دارد. بسته به مثبت یا منفی بودن مقدار K شروط مربوط به رسم مکان ریشه ها متفاوت خواهد بود.

قواعد رسم مکان ریشه برای $K > 0$

برای $K > 0$ از رابطه بالارا می توان بصورت دو شرط کلی بیان نمود:

شرط اندازه:

$$\left|F(z)\right| = \frac{1}{K}$$

شرط زاویه :

$$\text{R}F(z) = (2k+1)\pi \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

مقادیری از S که هر دو شرط را برآورده نمایند ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته می‌باشند.

مراحل رسم مکان ریشه براي $K > 0$ بصورت زیر است :

۱- تعداد قطب و صفر بینهایت (تعداد مجانب مربوطه) را مشخص می کنیم. تعداد صفر و قطب در بینهایت برابر اختلاف تعداد قطب و صفر $(n - m)$ است.

۲- مکان ریشه ها از قطب شروع و در صفر پایان می یابد.

۳- مکان روی محور حقیقی جایی است که سمت راست آن تعداد فردی قطب یا صفر وجود داشته باشد.

٤- محل تلاقی مجانب ها (σ) و زاویه مجانبی (φ) بصورت زیر بدست می آیند.

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \qquad\qquad \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

نقاط شکست مکان جایی وجود دارند که مکان بین دو قطب یا دو صفر قرار گیرد. (هرگاه دو قطب یا دو صفر در کنار هم و روی محور حقیقی قرار گیرند همواره در بین آن دو نقطه شکست خواهیم داشت.) این نقاط از حل معادله زیر بدست می آیند:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{F(s)}\right) = 0$$

مقدار پارامتر K در هر نقطه از مکان از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{d_1 d_2 \ldots d_n}{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_m}$$

که در آن d_i فاصله نقطه مورد نظر از قطب و ℓ_i فاصله از صفر هاست.

زاویه خروج از قطب مختلط بصورت زیر بدست می آید:

زاویه خروج از قطب زاویه‌ای است که به ازای $K > 0$ مکان هندسی ریشه ها از قطب‌های حلقه باز خارج شود.

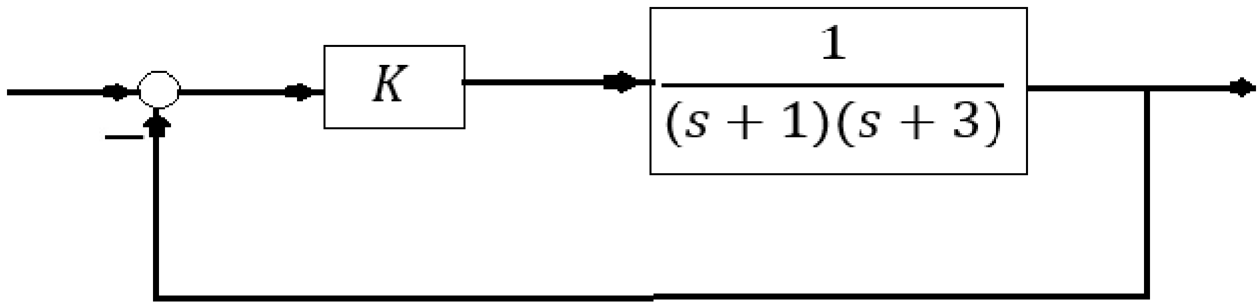
شرط زاویه ⟸ مجموع زاویه صفر ها − مجموع زاویه قطب ها = $(2i+1)$۱۸۰

برای استفاده از شرط زاویه یک قطب را در نظر گرفته و دیگر صفرها و قطب‌ها را به آن وصل می‌کنیم سپس زاویه خروج از آن قطب را محاسبه می‌کنیم.

نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌های مزدوج با هم برابر و قرینه می‌باشد و همچنین زاویه‌ی ورود به صفرهای مزدوج نیز با هم برابر و قرینه می‌باشد.

مثال : مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K > 0$ رسم نمایید.

در مکان هندسی ریشه ها به دنبال آن هستیم که محل تغییرات قطب های حلقه بسته سیستم را به ازای تغییر ۱ پارامتر محاسبه کنیم



$$\frac{\frac{K}{(s+1)(s+3)}}{1+\frac{K}{(s+1)(s+3)}} = \frac{k}{s^2+4s+3+K}$$

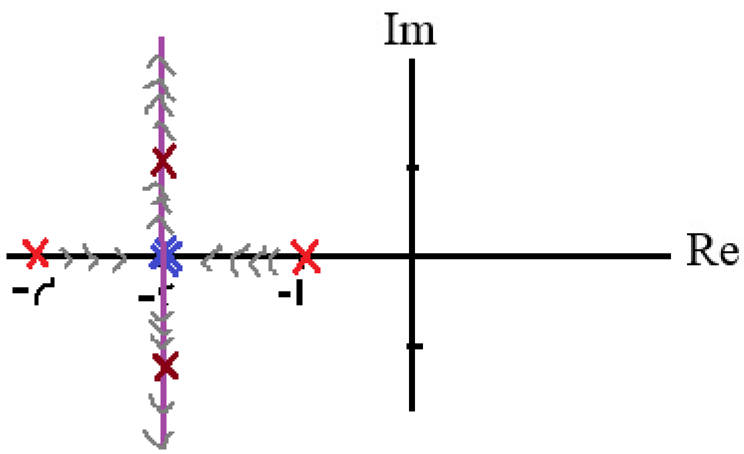
مخرج تابع تبدیل به ازاء K های مختلف مساوی صفر قرار می‌دهیم. $s^2 + 4s + 3 + K = 0$

$K = 0 \Longrightarrow s^2 + 4s + 3 + 0 = 0 \Longrightarrow$ ریشه ها $\rightarrow -1$ و -3

$K = 1 \Longrightarrow s^2 + 4s + 3 + 1 = 0 \Longrightarrow$ ریشه ها $\rightarrow -1$ و -2

$K = 2 \Longrightarrow s^2 + 4s + 3 + 2 = 0 \Longrightarrow$ ریشه ها $\rightarrow \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \rightarrow -2 \pm j$

$K = 3 \Longrightarrow \cdots$



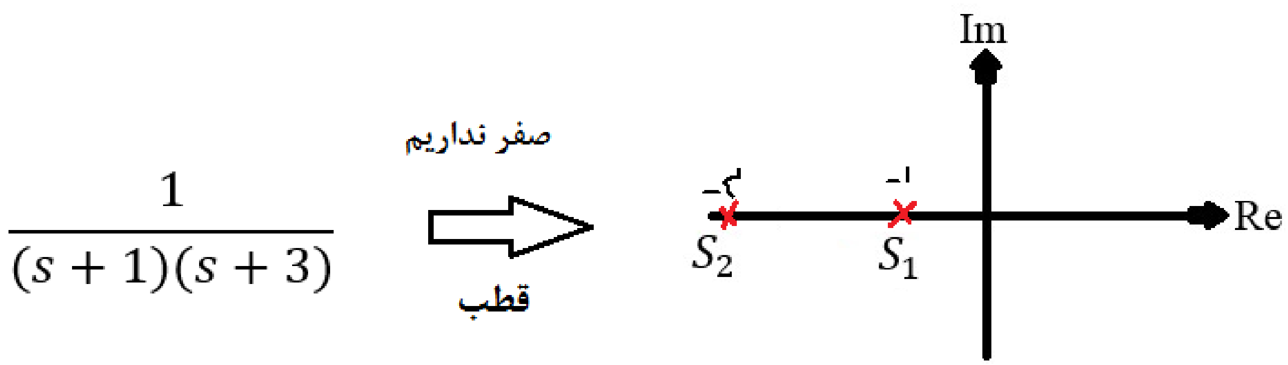
سیستم پایدار است.

مثال : مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K > 0$ رسم نمایید.

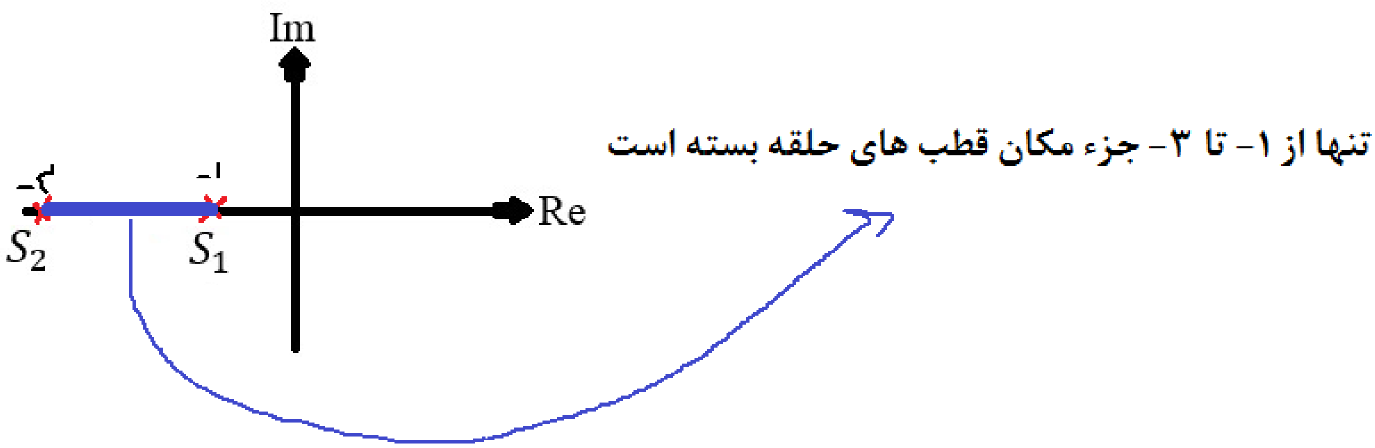
$$\mathbf{1)}\ \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{s}+\mathbf{1})(\boldsymbol{s}+\mathbf{3})}$$

تذکر: در مکان هندسی ریشه ها به دنبال آن هستیم که روی تابع تبدیل حلقه باز به ازاء تغییر یک پارامتر کنترلی (K) یا بهره کنترلی محل تغییرات قطب های حلقه بسته را بدست آورید.

۱- در ابتدا محل صفرها و قطب های حلقه باز را در صفحه مشخص می کنیم.



۲- محلی از محور حقیقی جزء مکان قطب های حلقه بسته است که سمت راست آن به تعداد فرد تا صفر و قطب داشته باشیم:



۳-تعداد مجانب ها : مکان به ازاء $K = 0$ از قطب ها حلقه باز شروع می‌کند وبه سمت صفرها می‌رود، در صورتی که n قطب و m صفر داشته باشیم.

به تعداد n-m تا مجانب داریم که همان محل قطب ها به ازای $K = \infty$ می‌رود.

$$n - m = 2 - 0 = 2$$

٤- محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی

$$\frac{\text{مجموع قطب ها} - \text{مجموع صفر ها}}{n - m}$$

$$\frac{(-3 - 1) - (0)}{2 - 0} = -2$$

٥- زاویه مجانب ها با محور حقیقی

$$\pm \frac{180(2K + 1)}{n - m} \ \text{به ازاء} \ \Rightarrow K = 0,1,2, \dots$$

$$\pm \frac{180(2 \times (0) + 1)}{2 - 0} = \pm 90$$

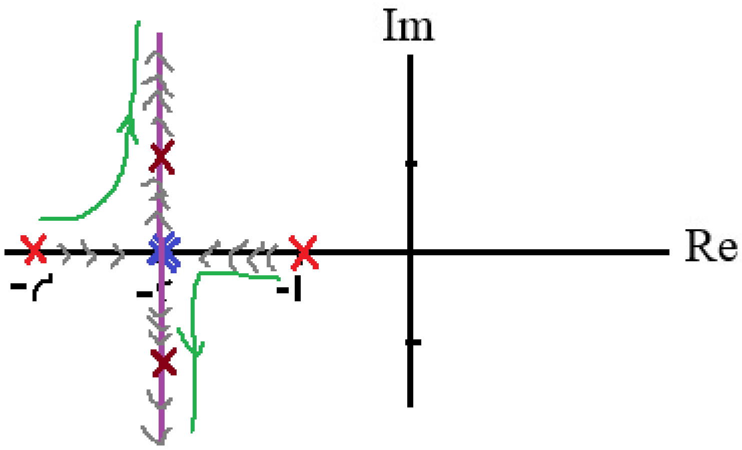
نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌هایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار دارند یا زاویه‌ی ورود به صفرهایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار می‌گیرند صفر یا ۱۸۰ می‌باشد.

اگر مکان هندسی سمت راست قطب یا صفر باشد زاویه صفر و اگر سمت چپ قطب یا صفر باشد ۱۸۰ است.

۶- محل جدا شدن مکان از محور حقیقی را نقطه‌ی شکست مکان می‌گوییم. در ابتدا با توجه به فرمول معادله مشخصه $1 + KGH = 0$ مقدار K برابر $\frac{1}{GH}$ را محاسبه می‌کنیم، بعد مشتق آن را نسبت به S مساوی صفر $(\frac{dK}{ds} = 0)$ قرار می‌دهیم و ریشه هایی از آنچه جزء مکان باشد نقطه شکست است.

$$GH = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow K = \frac{1}{GH} = (s+1)(s+3)$$

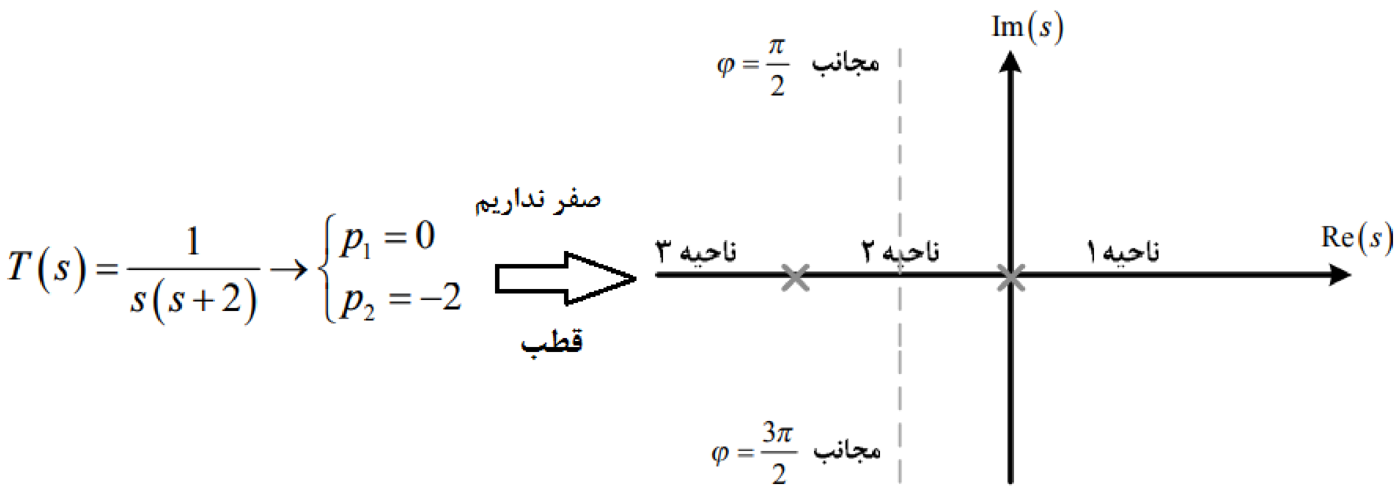
$$s^2 + 4s + 3 \Rightarrow \frac{dK}{ds} = 2s + 4 = 0 \Rightarrow s = -2$$



مثال: مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K > 0$ رسم نمایید.

$$\mathbf{1)}\Delta(\boldsymbol{s}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{K}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}+\mathbf{1})}$$

برای رسم مکان ریشه ها مراحل فوق را به ترتیب انجام می دهیم:



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =

منظور از مجانب ها این است که به ازاء K های خیلی بزرگ قطب ها در چه خطی قرار می‌گیرند

$$n - m = 2 - 0 = 2$$

دو زاویه مجانبی لازم داریم:

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \left\{ \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{k=0}, \underbrace{\frac{3\pi}{2}}_{k=1} \right\}$$

محل تلاقی مجانب ها (σ):

$$\sigma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n - m} = \frac{(0-2)-0}{2-0} = -1$$

سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۲ یک قطب وجود دارد (فرد) مکان هست. بین دو قطب نقطه شکست داریم.

سمت راست ناحیه ۳ دو قطب وجود دارد (زوج) مکان نیست.

نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌هایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار دارند یا زاویه‌ی ورود به صفرهایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار می‌گیرند صفر یا ۱۸۰ می‌باشد.

اگر مکان هندسی سمت راست قطب یا صفر باشد زاویه صفر و اگر سمت چپ قطب یا صفر باشد ۱۸۰ است.

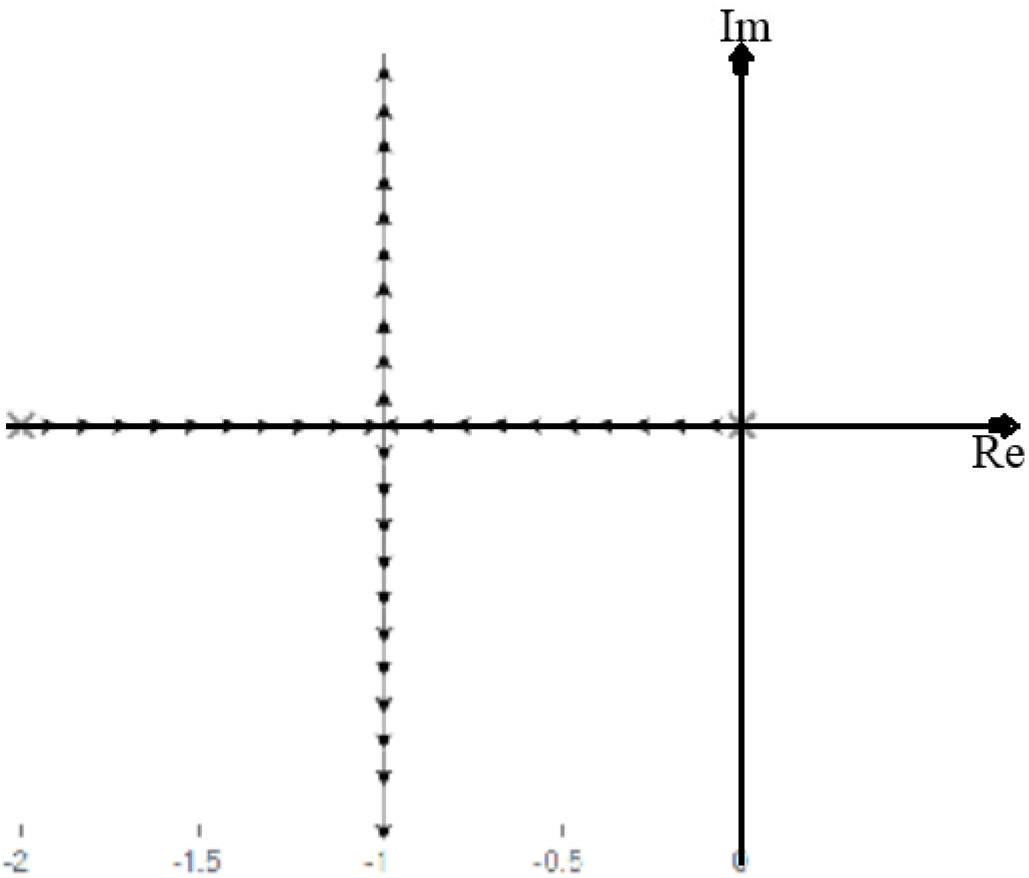
محاسبه نقطه شکست:

$$T(s) = \frac{1}{s(s+2)} \to -\frac{1}{T(s)} = -s(s+2)$$

$$\to \frac{d}{ds}\left(-s(s+2)\right) = -(2s+2) = 0$$

$$\to 2s + 2 = 0 \to s = -1 \ \boxed{\checkmark}$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود.



مثال: مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را براي $K > 0$ رسم نمایید.

$$1)\Delta(s) = 1 + K\frac{1}{S(S+1)(S+2)}$$

برای رسم مکان ریشه ها مراحل ۹ گانه را به ترتیب انجام می دهیم:

$$T(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -2 \end{cases}$$

تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =

منظور از مجانب ها این است که به ازاء K های خیلی بزرگ قطب ها در چه خطی قرار می‌گیرند

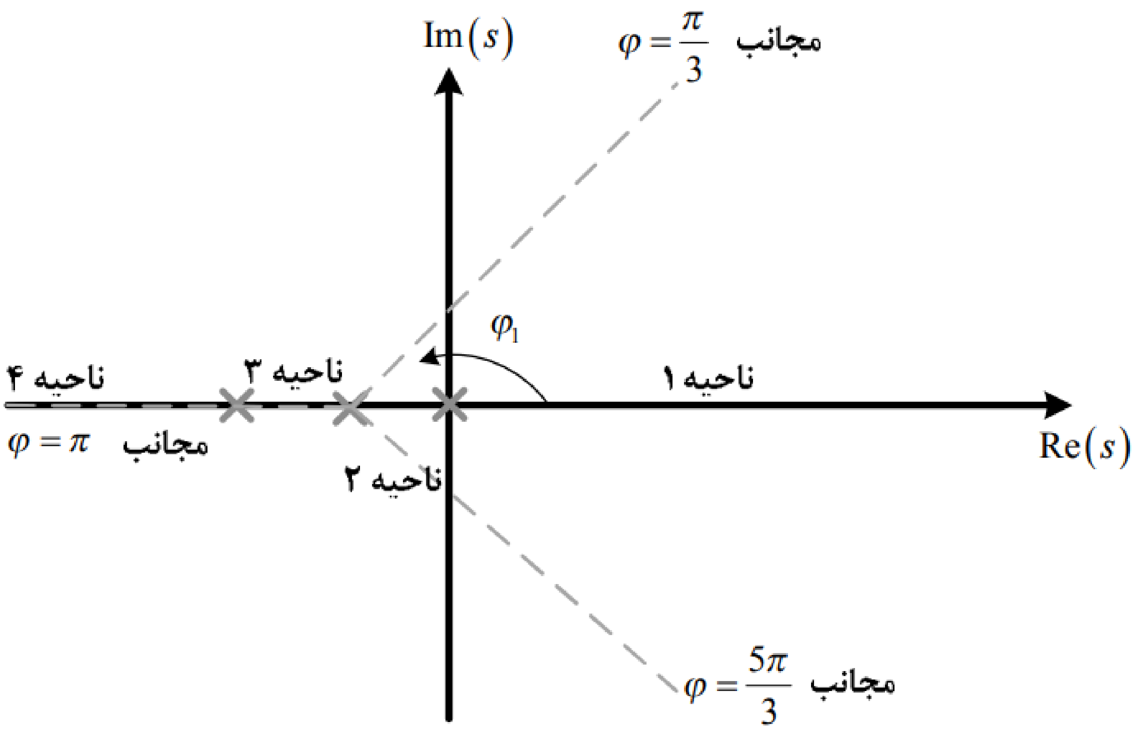
$$n - m = 3 - 0 = 3$$

سه زاویه مجانبی لازم داریم:

$$\varphi=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\left\{\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{k=0},\underbrace{\pi}_{k=1},\underbrace{\frac{5\pi}{3}}_{k=2}\right\}$$

محل تلاقی مجانب ها (σ):

$$\sigma=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{0+(-1)+(-2)}{3}=-1$$



سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفري وجود ندارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۲ یک قطب وجود دارد (فرد) مکان هست. بین دو قطب نقطه شکست داریم.

سمت راست ناحیه ۳ دو قطب وجود دارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ٤ سه قطب وجود دارد (فرد) مکان هست.

نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌هایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار دارند یا زاویه‌ی ورود به صفرهایی که بر روی محور اعداد حقیقی قرار می‌گیرند صفر یا ۱۸۰ می‌باشد.

اگر مکان هندسی سمت راست قطب یا صفر باشد زاویه صفر و اگر سمت چپ قطب یا صفر باشد ۱۸۰ است.

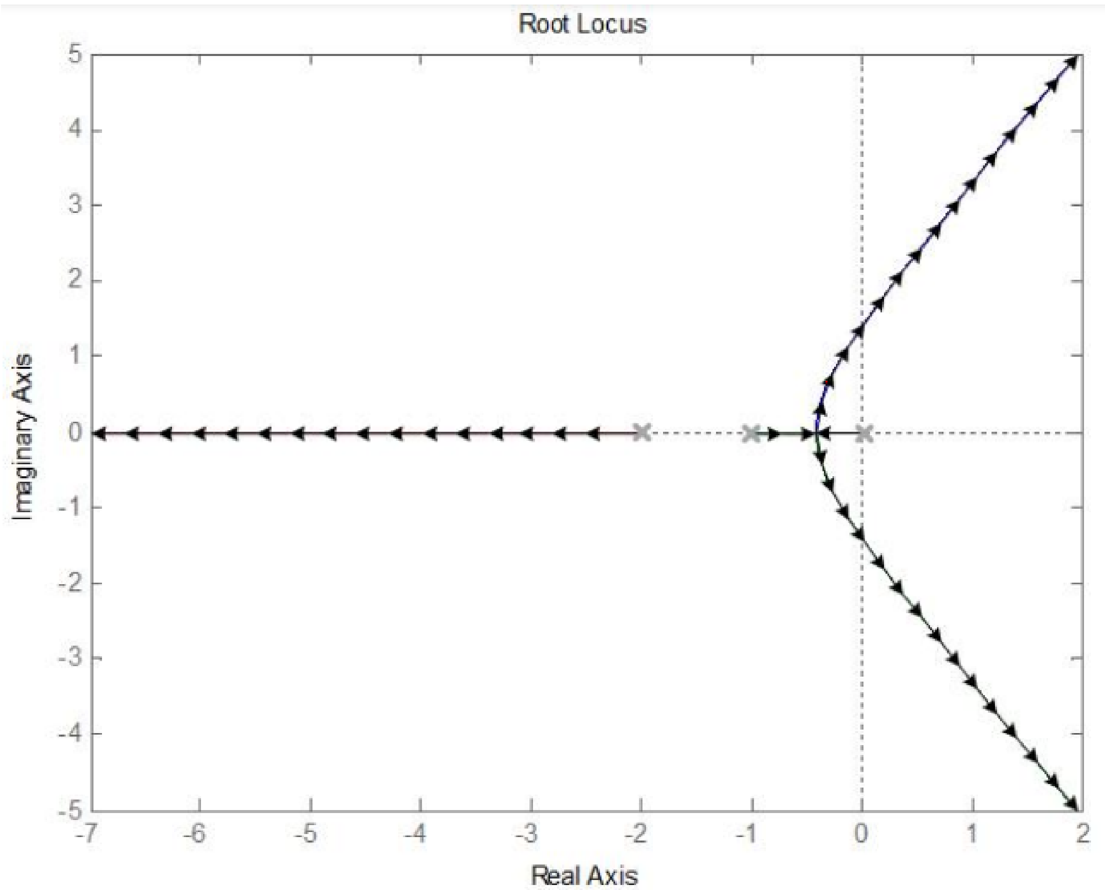
محاسبه نقطه شکست:

$$T(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\rightarrow -\frac{1}{T(s)}=-s(s+1)(s+2)$$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left(-s(s+1)(s+2)\right)=-\frac{d}{ds}\left(s^3+3s^2+2s\right)=-\left(3s^2+6s+2\right)=0$$

$$\rightarrow 3s^2+6s+2=0\rightarrow s=\begin{cases}-1.58\\ -0.423☑\end{cases}$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود.



مثال: مکان هندسی ریشه های معدله مشخصه زیر را به ازاء $K > 0$ بدست آورید.

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{f(s) = s^2 + 2s + k(s+2) + 2}$$

اول $f(s)$ را به Δ تبدیل می کنیم.

$$\Delta = 1 + \mathrm{k}G(s)H(s) = 0$$

$\mathrm{k}G(s)H(s)$ تابع تبدیل حلقه باز در نظر می‌گیرند، که این در شرایطی است فیدبک واحد باشد.

$$f(s) = \frac{s^2 + 2s + k(s+2) + 2}{s^2 + 2s + 2} = 1 + k\frac{(s+2)}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

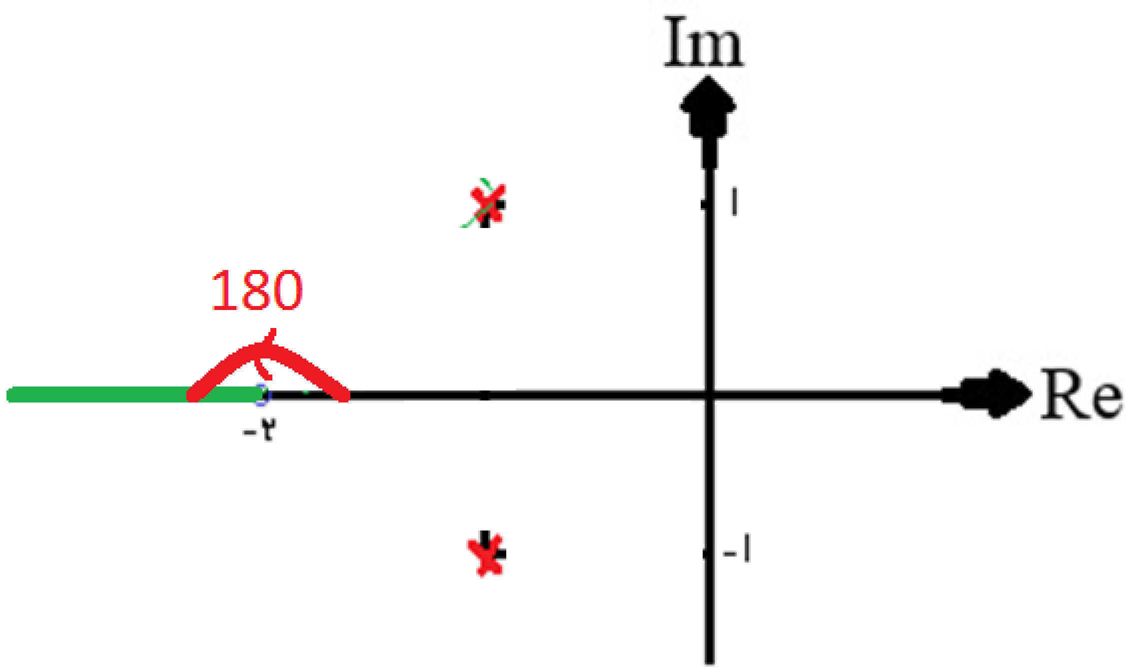
$$\begin{cases} z \Longrightarrow s = -2 \\ p \Longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \begin{cases} s_1 = -1 + j \\ s_2 = -1 - j \end{cases} \end{cases}$$

تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب

تعداد مجانب ها $\qquad m = 1\,, n = 2 \Longrightarrow n - m = 1$

یک زاویه مجانبی لازم داریم و محل برخورد مجانب ها دیگر معنی ندارد:

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{1} = \left\{ \underbrace{\pi}_{k=0} \right\}$$



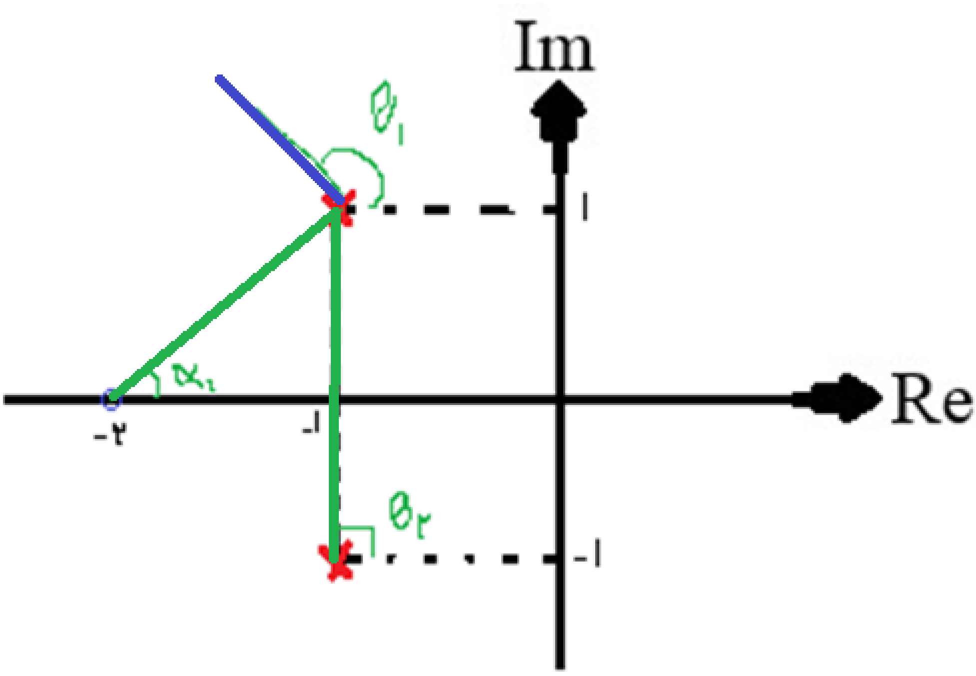
زاویه خروج از قطب مختلط بصورت زیر بدست می آید:

زاویه خروج از قطب زاویه‌ای است که به ازای $K > 0$ مکان هندسی ریشه ها از قطب‌های حلقه باز خارج شود.

شرط زاویه ⟸ مجموع زاویه قطب ها − مجموع زاویه صفر ها = (2i+1)۱۸۰

برای استفاده از شرط زاویه یک قطب را در نظر گرفته و دیگر صفرها و قطب‌ها را به آن وصل می‌کنیم سپس زاویه خروج از آن قطب را محاسبه می‌کنیم.

نکته: زاویه‌ی خروج از قطب‌های مزدوج با هم برابر و قرینه می‌باشد و همچنین زاویه‌ی ورود به صفرهای مزدوج نیز با هم برابر و قرینه می‌باشد.



شرط زاویه ⟸ مجموع زاویه قطب ها − مجموع زاویه صفر ها = (2i+1)۱۸۰

$$\alpha_1 = tan^{-1}\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجانب}} = tan^{-1}\frac{1}{1} = 45°$$

$$\theta_2 = 90$$

شرط زاویه ⟸ مجموع زاویه قطب ها − مجموع زاویه صفر ها = (2i+1)۱۸۰

$$45° - (90° + \theta_1) = 180° \Longrightarrow \theta_1 = 135°$$

زاویه خروج از قطب های مزدوج (θ_1 و θ_2) با هم برابر و قرینه می‌باشد.

سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفري وجود ندارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۲ دو قطب وجود دارد (زوج) مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۳ دو قطب و یک صفر وجود دارد (فرد) مکان هست.

جدول راث را رسم می کنیم که آیا مکان هندسی ریشه‌ها به محور $j\omega$ برخورد می‌کند یا نه:

$$f(s) = s^2 + 2s + k(s+2) + 2 = 0$$

$$s^2 + (k+2)s + 2(k+1) = 0$$

s^2	1	$2(k+1)$
s^1	$(k+2)$	0
s^0	$2(k+1)$	0

به دلیل اینکه به ازاء $K > 0$ هیچ گاه در جدول راوث سطری صفر نمی‌شود پس، مکان هندسی ریشه ها با محور $j\omega$ برخورد نمی‌کند.

محاسبه نقطه شکست:

$$T(s) = G_1(s)H_1(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} \Longrightarrow \frac{-1}{T(s)}$$

$$\frac{-1}{T(s)} = \frac{\frac{-1}{1}}{\frac{s+2}{s^2+2s+2}} = \frac{-(s^2+2s+2)}{s+2}$$

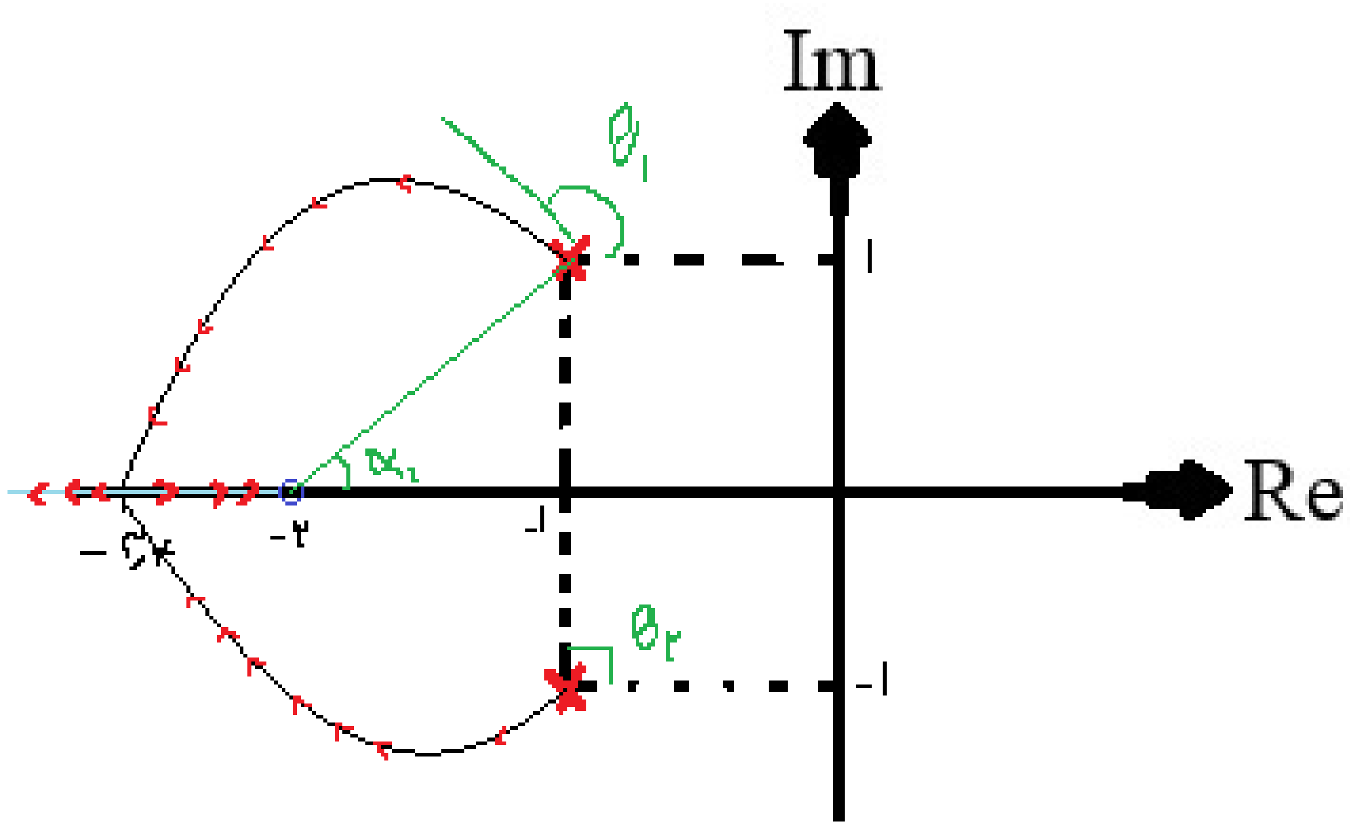
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-(s^2+2s+2)}{s+2}\right) = \frac{(-2s-2)(s+2) - \left(-(s^2+2s+2)\right)}{(s+2)^2} = 0$$

$$-2s^2 - 4s - 2s - 4 + s^2 + 2s + 2 = 0$$

$$-s^2 - 4s - 2 = 0 \begin{cases} s_1 = -0.54 & \text{غ ق ق} \\ s_2 = -3.4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

s_1 چون روی مکان هندسی ریشه ها قرار ندارد.

s_2 چون روی مکان هندسی ریشه ها قرار دارد.



منابع:

۱- جزوه استاد مهدی سیاهی

۲- جزوه استاد راحیل زرگری

پایان جلسه نهم

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان