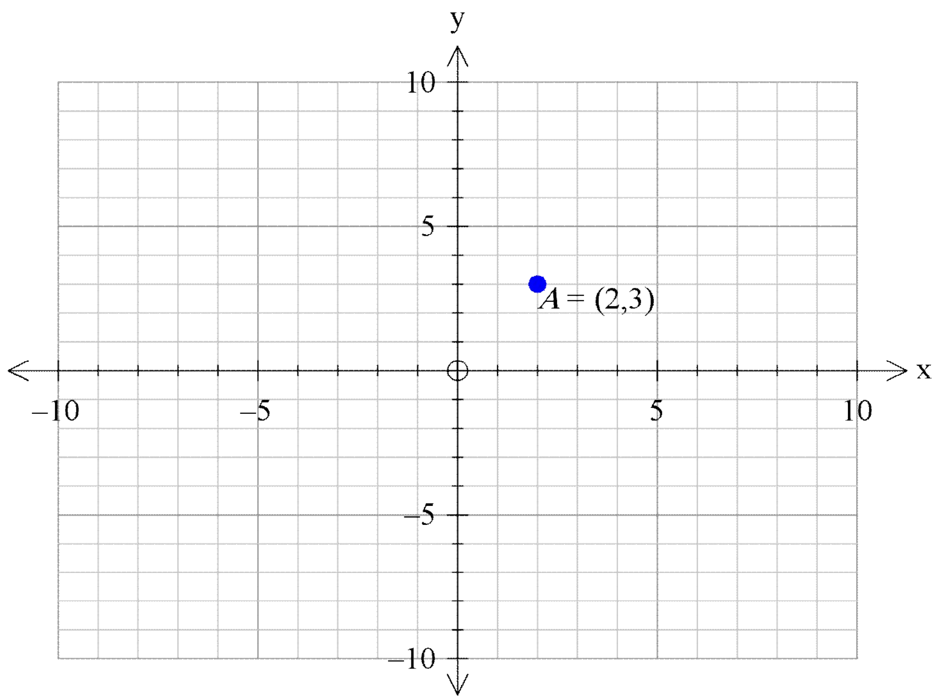
توابع دو متغیره

۱-۱. تعریف توابع دو متغیره

مجموعه کلیه زوج مرتبهای (x,y) بطوریکه $x,y \in \mathbb{R}$ است را با $\mathbb{R}^۲$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر داریم

$$\mathbb{R}^۲ = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

از نظر هندسی فضای $\mathbb{R}^۲$ در تناظر یک به یک با دستگاه مختصات دکارتی است به این معنی که هر عضو این فضا متناظر نقطه‌ای در این دستگاه و هر نقطه در دستگاه نیز متناظر عضوی از فضای $\mathbb{R}^۲$ است.



تابع دو متغیره f قاعده ای است که به هر زوج مرتب از اعداد حقیقی مانند (x,y) در مجموعه $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ عدد حقیقی و یکتا را که با $f(x,y)$ نمایش می‌دهیم نسبت دهد. در این صورت مجموعه $D = D_f$ را دامنه تابع f گوییم.

مثال: قاعده $f(x,y) = \sqrt{x + y - ۱}$ تابعی دو متغیره است که مثلا به زوج مرتب $(۳,۲)$ از $\mathbb{R}^۲$ عدد حقیقی و یکتای ۲ را نسبت می‌دهد چراکه

$$f(۳,۲) = \sqrt{۳ + ۲ - ۱} = \sqrt{٤} = ۲$$

اما این تابع در هر زوج مرتب از $\mathbb{R}^۲$ تعریف نمی‌شود مثلا به ازای زوج مرتب $(۱,-۲)$ از $\mathbb{R}^۲$ با قاعده داده شده نمی‌توان عدد حقیقی به زوج مرتب داده شده نسبت داد. چراکه

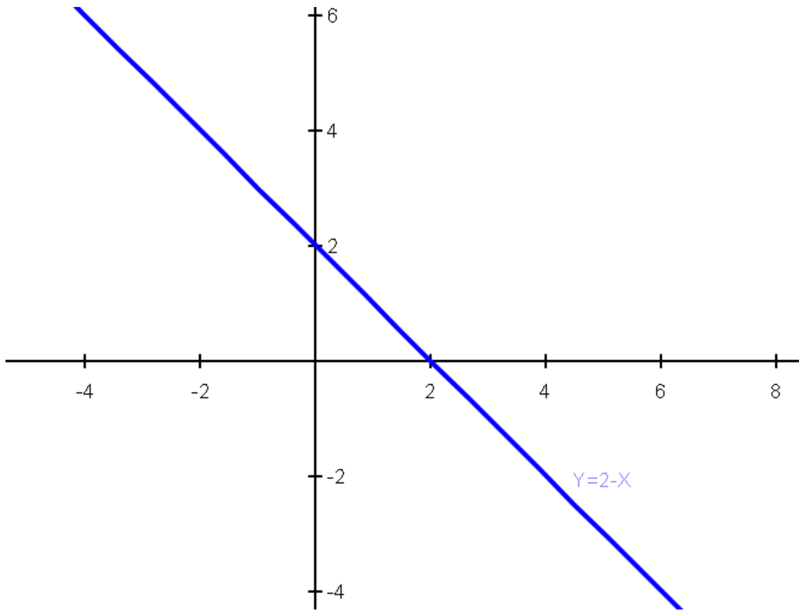
$$f(-۲,۱) = \sqrt{-۲+۱-۱} = \sqrt{-۲} \quad \times$$

زیرا زیررادیکال با فرجه زوج نمی‌تواند عدد منفی باشد.

همانطور که گفته شد مجموعه تمام زوج مرتب هایی که تابع در آنها تعریف می‌شود را دامنه تابع گوییم و آن را با D_f نشان می‌دهیم. به عنوان مثال در تابع $f(x,y) = \sqrt{x+y-۱}$ برای مشخص کردن دامنه می‌دانیم باید زیر رادیکال با فرجه زوج مثبت باشد بنابراین

$$x + y - ۱ \geq 0 \Rightarrow D_f = \{(x,y) : x + y - ۱ \geq 0\}$$

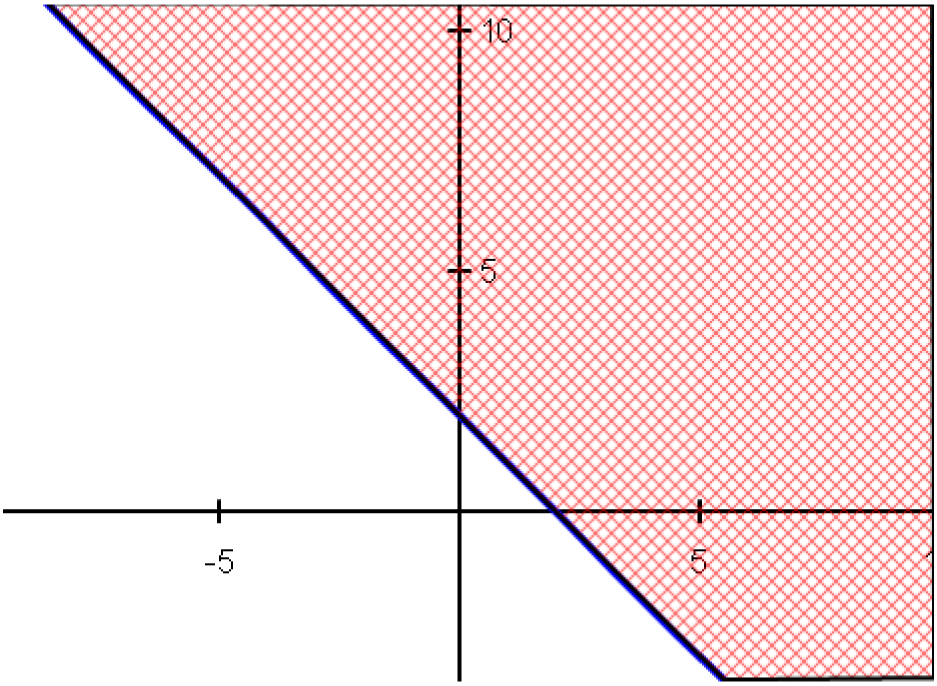
اما می دانیم معادله $x + y - ۱ = 0$ معادله یک خط[1] در صفحه xy است که نمودار آن را در تصویر زیر می‌بینید.



شکل ۱: معادله خط $x + y - ۱ = ۰$

بنابراین دامنه تابع f با توجه اینکه سمت راست خط $x + y - ۱ = 0$ جواب است در تصویر زیر مشخص شده است.

[1] معادله $ax + by = c$ در فضای $\mathbb{R}^۲$ بیان کننده معادله یک خط است که با داشتن دو نقطه از آن می‌توان نمودار خط را ترسیم کرد.



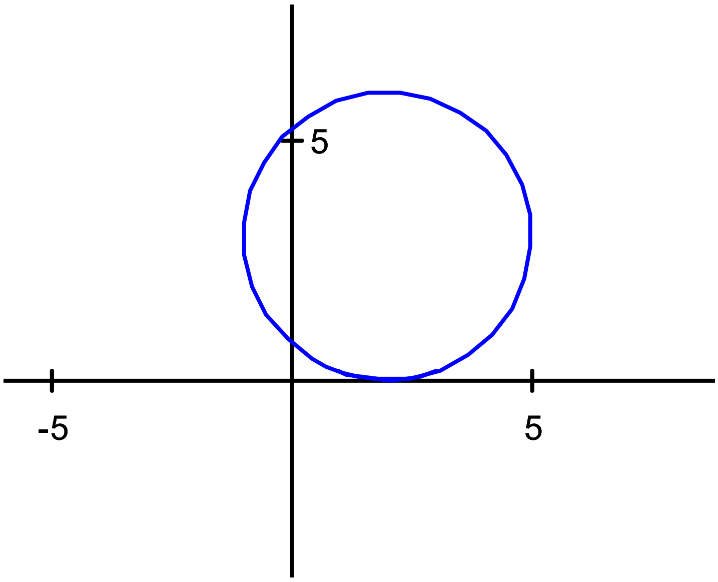
شکل ۲: ناحیه $x + y - ۱ \geq ۰$ هاشور زده شده است.

مثال: با فرض اینکه $f(x, y) = x \ln(y^۲ - x)$ مطلوب است محاسبه $f(۳, ۲)$

حل:

$$\begin{aligned} f(۳, ۲) &= ۳ \ln(۲^۲ - ۳) \\ &= ۳ \ln(۱) \\ &= ۳ \times ۰ = ۰ \end{aligned}$$

معادله دایره ای به مرکز (a, b) و شعاع r بصورت $(x - a)^۲ + (y - b)^۲ = r^۲$ بیان می‌شود مثلا دایره‌ای به مرکز $(۲, ۳)$ و شعاع ۳ برابر است با $(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۹$ که نمودار آن بصورت زیر است.



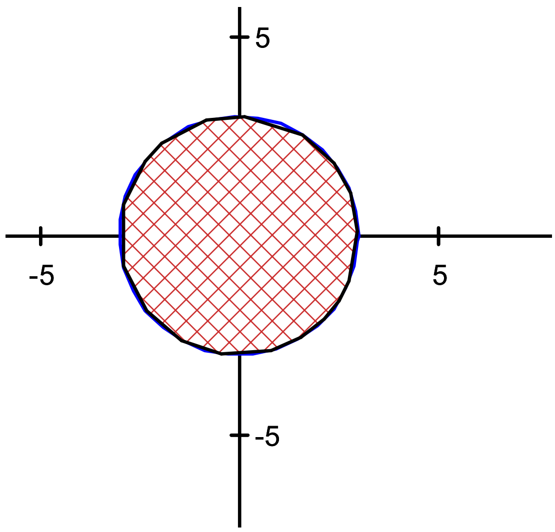
شکل ۳ : نمودار دایره به معادله $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۹$

مثال: دامنه تابع $g(x,y)=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} D_g &= \{(x,y) : ۹-x^۲-y^۲ \geq ۰\} \\ &= \{(x,y) : x^۲+y^۲ \leq ۹\} \end{aligned}$$

معادله $x^۲+y^۲=۹$ معادله دایره ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۳ است بنابراین $x^۲+y^۲\leq ۹$ درون و روی دایره مذکور است که شکل آن به صورت زیر است.



شکل ۴: ناحیه $x^2 + y^2 \leq 9$ هاشور زده است.

نکته۱: برای مشخص کردن مقداری که f در نقطه (x,y) می‌گیرد می‌نویسیم $z = f(x,y)$ که در آن متغیرهای x, y را متغیرهای مستقل (متغیرهای ورودی به تابع) و z (متغیر حاصل از اعمال تابع روی ورودیها) را متغیر وابسته می‌گوییم.

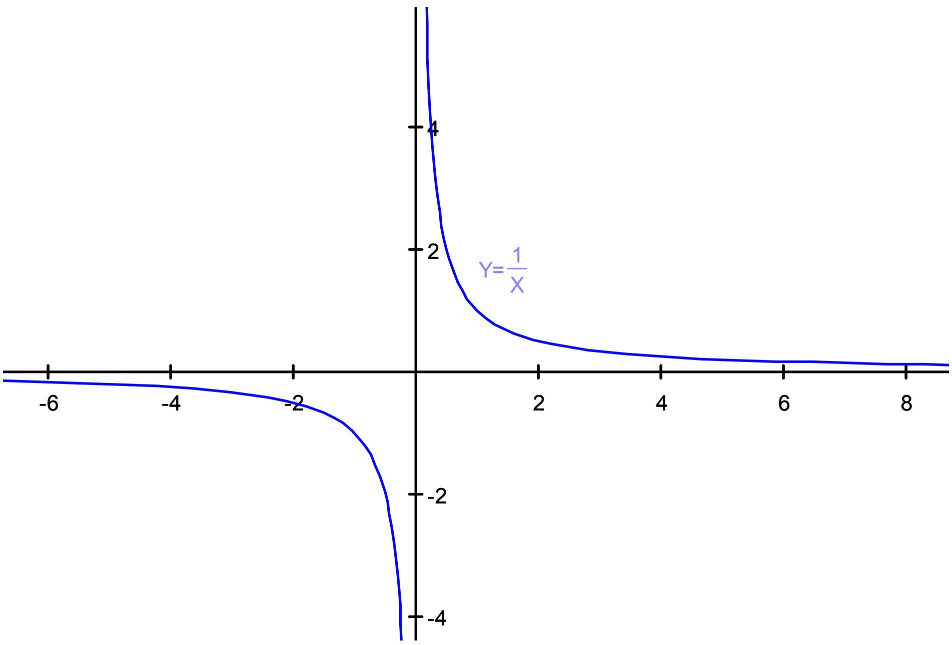
نکته۲: دامنه توابع دو متغیره زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^2$ و برد آن زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x,y) = \sqrt{xy - 1}$ را بیابید و آن را در صفحه xy مشخص کنید؟

حل:

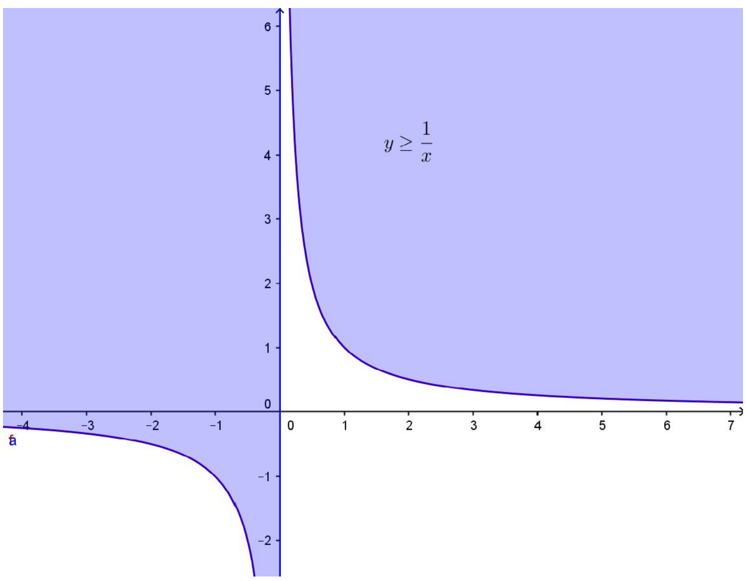
$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) : xy - 1 \geq 0\} \\ &= \{(x,y) : xy \geq 1\} \\ &= \{(x,y) : y \geq \frac{1}{x}\} \end{aligned}$$

حال تابع $y = \frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم



شکل ۵: نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$

حال از روی نمودار نواحی که در آنها $y \geq \frac{۱}{x}$ باشد را مشخص می‌کنیم.



شکل ۶ : ناحیه $y \geq \frac{۱}{x}$ **سایه زده شده است.**

مثال: برای تابع $f(x,y) = x^{۲}e^{۳xy}$ مطلوب است اولا محاسبه $f(۲,۰)$ و ثانیا محاسبه دامنه تابع f.

حل:

$$f(۲,۰) = ۲^۲ e^{۳\times ۲\times ۰} = ۴e^۰ = ۴\times ۱ = ۴$$

برای هر $(x,y)\in \mathbb{R}^۲$ ، $x^۲$ و $e^{۳xy}$ تعریف شده هستند بنابراین داریم

$$D_f = \mathbb{R}^۲$$

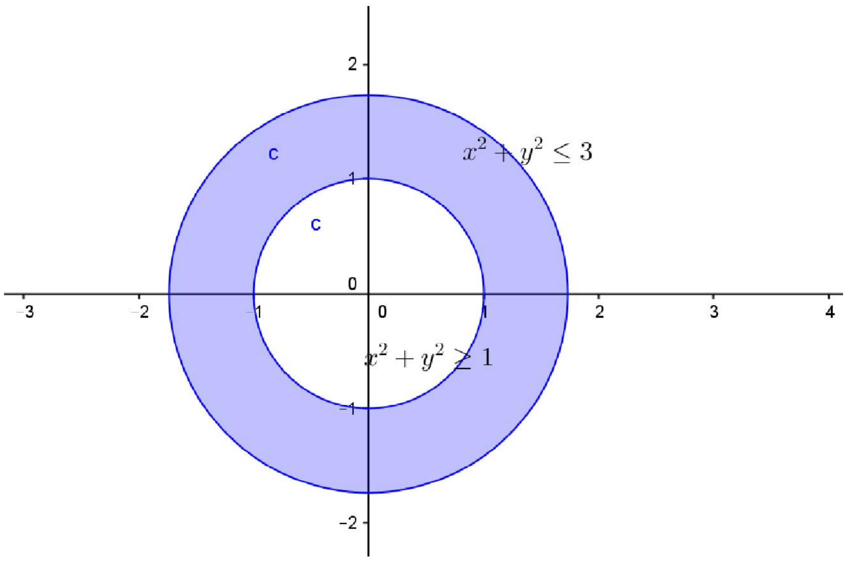
مثال: دامنه توابع زیر را محاسبه کنید؟

الف) $f(x,y) = \arcsin(x^۲ + y^۲ - ۲)$

حل: می‌دانیم در تابع $z = \arcsin(t)$ باید $-۱ \le t \le ۱$ بنابراین

$$D_f = \{(x,y) : -۱ \le x^۲ + y^۲ - ۲ \le ۱\}$$

اما نامساوی $x^۲ + y^۲ - ۲ \le ۱$ یا در واقع نامساوی $x^۲ + y^۲ \le ۳$ ناحیه درون و روی دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع $\sqrt{۳}$ است. از طرف دیگر نامساوی $-۱ \le x^۲ + y^۲ - ۲$ یا در واقع نامساوی $x^۲ + y^۲ \ge ۱$ ناحیه بیرون و روی دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱ است. در نتیجه اشتراک این دو ناحیه دامنه تابع داده شده است که نمودار آن را در زیر می‌بینید.



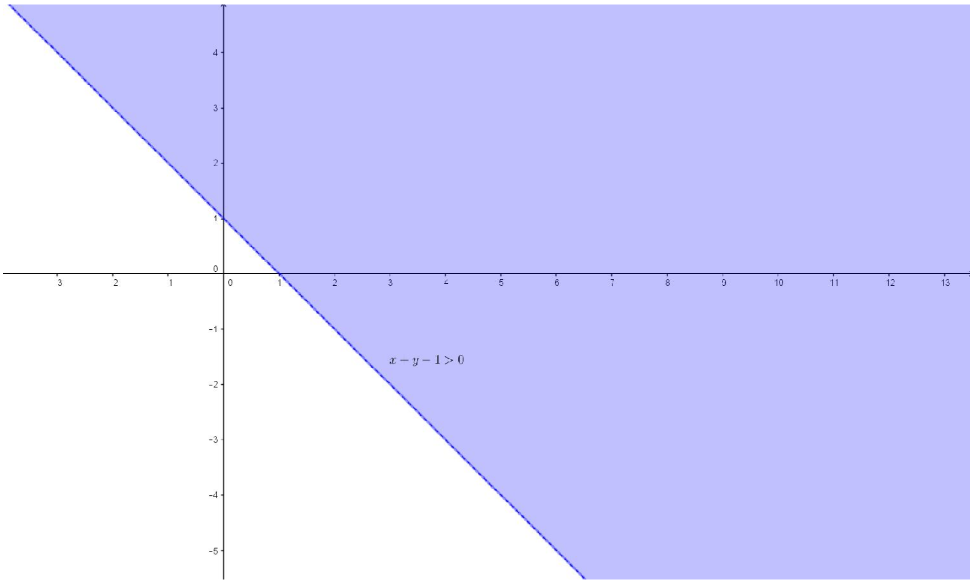
شکل ۷ : ناحیه $۱ \le x^۲ + y^۲ \le ۳$ سایه زده شده است.

ب) $f(x,y) = \ln(x + y - ۱)$

حل: می دانیم در تابع $z = \ln(t)$ باید $t > ۰$ باشد بنابراین داریم

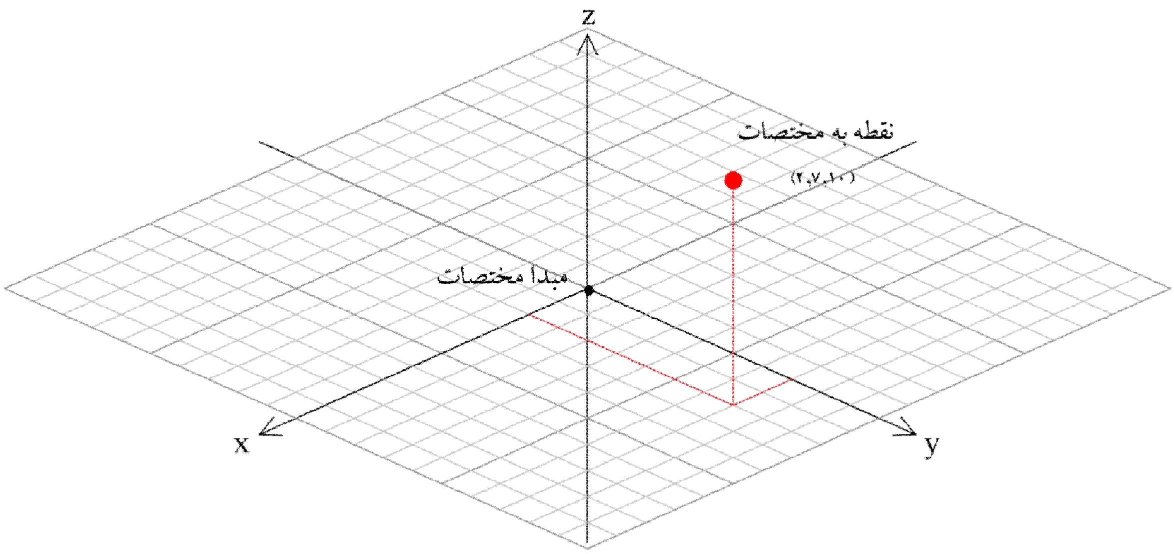
$$D_f = \{(x,y) : x + y - ۱ > ۰\}$$

هر معادله به فرم $ax + by = d$ معادله یک خط در $\mathbb{R}^۲$ است و دامنه عبارت است از نقاطی که در قسمت بالای خط مذکور قرار دارند که نمودار آن را در زیر می‌بینید.



شکل ۸: ناحیه $x + y - ۱ > ۰$ سایه زده شده است.

فضای $\mathbb{R}^۳$ مجموعه همه سه تاییهای به صورت $(x_۱, x_۲, x_۳)$ است بطوریکه $x_۱, x_۲, x_۳ \in \mathbb{R}$ به عبارت دیگر $\mathbb{R}^۳ = \{(x_۱, x_۲, x_۳) \mid x_i \in \mathbb{R}, ۱ \le i \le ۳\}$. از نظر هندسی فضای $\mathbb{R}^۳$ مجموعه تمام نقاطی در فضا است که مولفه اول، دوم و سوم به ترتیب طول، عرض و ارتفاع از مبدا با مختصات $(0,0,0)$ هستند. در شکل زیر محورهای مختصات و مبدا مختصات مشخص شده اند.



۱-۲. حدودتوابع دو متغیره

مقادیر تابع

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^{۲}+y^{۲})}{x^{۲}+y^{۲}}$$

را وقتی که x و y هر دو به صفر نزدیک می‌شوند در جدول زیر بررسی می‌کنیم

y / x	-۱/۰	-۰/۵	-۰/۲	۰	۰/۲	۰/۵	۱/۰
-۱/۰	۰/۴۵۵	۰/۷۵۹	۰/۸۲۹	۰/۸۴۱	۰/۸۲۹	۰/۷۵۹	۰/۴۵۵
-۰/۵	۰/۷۵۹	۰/۹۵۹	۰/۹۸۶	۰/۹۹۰	۰/۹۸۶	۰/۹۵۹	۰/۷۵۹
-۰/۲	۰/۸۲۹	۰/۹۸۶	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۶	۰/۸۲۹
۰	۰/۸۴۱	۰/۹۹۰	۱/۰۰۰	ت.ن	۱/۰۰۰	۰/۹۹۰	۰/۸۴۱
۰/۲	۰/۸۲۹	۰/۹۸۶	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۶	۰/۸۲۹
۰/۵	۰/۷۵۹	۰/۹۵۹	۰/۹۸۶	۰/۹۹۰	۰/۹۸۶	۰/۹۵۹	۰/۷۵۹
۱/۰	۰/۴۵۵	۰/۷۵۹	۰/۸۲۹	۰/۸۴۱	۰/۸۲۹	۰/۷۵۹	۰/۴۵۵

جدول فوق مقادیر $f(x,y)$ را با دقت سه رقم اعشار به ازای نقطه هایی مانند (x,y) در نزدیکی مبدا نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود وقتی (x,y) به $(۰,۰)$ میل می‌کند مقادیر $f(x,y)$ به ۱ نزدیک می‌شود در این حالت می‌گوییم حد تابع f در نقطه $(۰,۰)$ برابر ۱ است و به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(x^{۲}+y^{۲})}{x^{۲}+y^{۲}} = ۱$$

به صورت مشابه مقادیر تابع

$$g(x,y) = \frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}$$

را وقتی که x و y هر دو به صفر نزدیک می‌شوند در جدول زیر بررسی می‌کنیم

x \ y	−۱/۰	−۰/۵	−۰/۲	۰	۰/۲	۰/۵	۱/۰
−۱/۰	۰/۰۰۰	۰/۶۰۰	۰/۹۲۳	۱/۰۰۰	۰/۹۲۳	۰/۶۰۰	۰/۰۰۰
−۰/۵	−۰/۶۰۰	۰/۰۰۰	۰/۷۲۴	۱/۰۰۰	۰/۷۲۴	۰/۰۰۰	−۰/۶۰۰
−۰/۲	−۰/۹۲۳	−۰/۷۲۴	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	−۰/۷۲۴	−۰/۹۲۳
۰	−۱/۰۰۰	−۱/۰۰۰	−۱/۰۰۰	ت.ن	−۱/۰۰۰	−۱/۰۰۰	−۱/۰۰۰
۰/۲	−۰/۹۲۳	−۰/۷۲۴	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	−۰/۷۲۴	−۰/۹۲۳
۰/۵	−۰/۶۰۰	۰/۰۰۰	۰/۷۲۴	۱/۰۰۰	۰/۷۲۴	۰/۰۰۰	−۰/۶۰۰
۱/۰	۰/۰۰۰	۰/۶۰۰	۰/۹۲۳	۱/۰۰۰	۰/۹۲۳	۰/۶۰۰	۰/۰۰۰

جدول فوق نیز مقادیر $g(x,y)$ را با دقت سه رقم اعشار به ازای نقطه هایی مانند (x,y) در نزدیکی مبدا نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود وقتی (x,y) به $(۰,۰)$ میل می‌کند مقادیر $g(x,y)$ به هیچ عددی نزدیک نمی‌شود در این حالت می‌گوییم تابع g در نقطه $(۰,۰)$ حد ندارد.

نکته: قضایای حدی در مورد توابع یک متغیره (اعمال جبری، قضیه فشردگی، یکتایی حد و ...) برای توابع دو متغیره نیز معتبر است.

مثال: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{e^x + e^y}{\cos x + \cos y}$ را بدست آورید.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} (e^x + e^y) = e^۰ + e^۰ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} (\cos x + \cos y) = \cos ۰ + \cos ۰ = ۱ + ۱ = ۲$$

بنابراین داریم

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \cos y} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

مثال) حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۱)} \dfrac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x}$ را بدست آورید.

حل:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} = \frac{\sqrt{۰+۱} - \sqrt{۱}}{۰} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در $\sqrt{x+y} + \sqrt{y}$ ضرب و تقسم می کنیم داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} &= \lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{(\sqrt{x+y} - \sqrt{y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})}{x(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x + y - y}{x(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{۱}{(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})} \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۰+۱} + \sqrt{۱}} = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

دقت کنید که قانون هوپیتال برای توابع دو متغیر برقرار نیست.

تعریف: تابع $z = f(x,y)$ و نقطه (x_0, y_0) مفروض است. $g(x,y)$ را یک مسیر عبوری از (x_0, y_0) در صفحه $\mathbb{R}^2$ گوییم اگر $g(x_0, y_0) = 0$.

مثال) تابع $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ و نقطه $(1,1)$ را در نظر بگیرید. در این صورت $y = x$ یک مسیر عبوری از نقطه $(1,1)$ در صفحه $\mathbb{R}^2$ است. همچنین $y = x^2$ نیز یک مسیر عبوری دیگر از نقطه $(1,1)$ در صفحه $\mathbb{R}^2$ است.

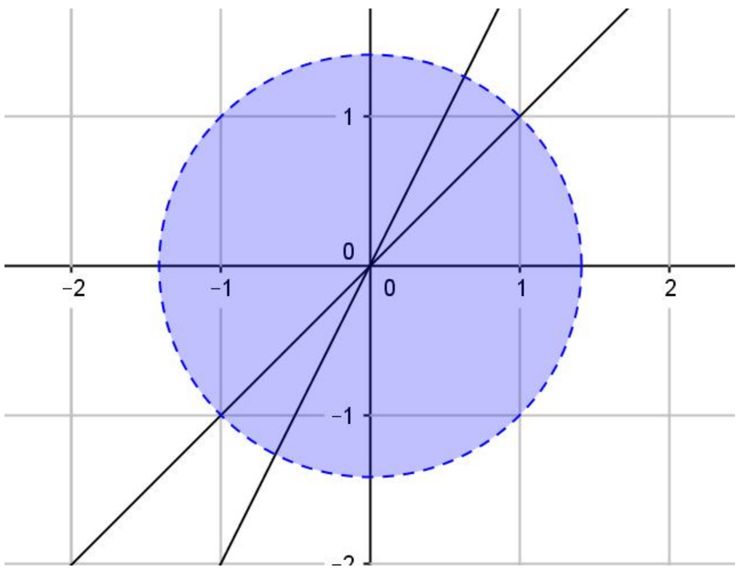
نکته: حد تابع f در نقطه (x_0,y_0) مستقل از نحوه نزدیک شده به نقطه (x_0,y_0) است به عبارت دیگر با فرض اینکه $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ آنگاه بر روی یک مسیر عبوری از (x_0, y_0) مانند $g(x,y)$ حد برابر l است.

نکته: اگر بر روی دو مسیر عبوری متفاوت از (x_0, y_0) مانند $g_1(x,y)$ و $g_2(x,y)$ اعداد متفاوتی برای حد حاصل شود حد تابع $z = f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) وجود ندارد.

مثال: نشان دهید توابع داده شده در نقاط داده شده حد ندارند.

الف) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ در نقطه $(0,0)$

حل: خط $y = mx$ که از مبدا عبور می‌کند را در نظر می‌گیریم. برای $m = 1$ و $m = 2$ خطوط فوق رسم شده است.



شکل ۹: خطوط $y = x$ و $y = 2x$

اگر روی خط $y = x$ به نقطه $(۰,۰)$ نزدیک شویم مقادیر تابع $z = f(x, y)$ بصورت زیر بدست می‌آیند

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x(x)}{x^۲ + x^۲} = \frac{x^۲}{۲x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین روی این مسیر مقدار حد تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

اگر روی خط $y = ۲x$ به نقطه $(۰,۰)$ نزدیک شویم مقادیر تابع $z = f(x, y)$ بصورت زیر بدست می‌آیند

$$f(x, y) = f(x, ۲x) = \frac{x(۲x)}{x^۲ + (۲x)^۲} = \frac{۲x^۲}{۵x^۲} = \frac{۲}{۵}$$

بنابراین روی این مسیر مقدار حد تابع برابر $\frac{۲}{۵}$ است.

چون روی دو مسیر مقادیر حد تابع متفاوت هستند، تابع داده شده در مبدا حد ندارد.

ب) $f(x, y) = \frac{xy^۳}{x^۲ + y^٦}$ در نقطه $(۰,۰)$

حل:

روی مسیر $y = mx$ که از نقطه $(۰,۰)$ می‌گذرد مقادیر تابع به صورت زیر بدست می‌آیند

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^۳}{x^۲ + (mx)^٦} = \frac{m^۳x^٤}{x^۲ + m^٦x^٦} = \frac{m^۳x^۲}{۱ + m^٦x^٤}$$

بنابراین روی مسیرهای به شکل $y = mx$ با نزدیک شدن به نقطه $(۰,۰)$ مقادیر تابع در همه موارد به صفر نزدیک می‌شود چرا که

$$\lim_{x \to ۰} \frac{m^۳x^۲}{۱ + m^٦x^٤} = \frac{۰}{۱ + ۰} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

اما روی مسیر $x = y^۳$ که از نقطه $(۰,۰)$ عبور می‌کند داریم

$$f(x,y)=f(y^{۳},y)=\frac{y^{۳}y^{۳}}{(y^{۳})^{۲}+(y)^{۶}}=\frac{y^{۶}}{y^{۶}+y^{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

چون روی مسیرهای متفاوت مقادیر متفاوت حاصل شد لذا تابع در نقطه داده شده حد ندارد.

پ) $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{xye^{x}}{x^{۲}-y^{۲}}$

حل: مسیر $y=mx$ را در نظر می‌گیریم

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{xmxe^{x}}{x^{۲}-(mx)^{۲}}=\frac{mx^{۲}e^{x}}{x^{۲}(۱-m^{۲})}=\frac{me^{x}}{۱-m^{۲}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۰}f(x,mx)=\lim_{x\to۰}\frac{me^{x}}{۱-m^{۲}}=\frac{m}{۱-m^{۲}}$$

چون مقدار حد تابع به مقدار m وابسته است به معنی آن است که روی مسیرهای متفاوت مقدار تابع متفاوت است بنابراین تابع حد ندارد.

۱-۳. پیوستگی توابع دو متغیره

تعریف: تابع $z=f(x,y)$ را در نقطه $(x_۰,y_۰)$ پیوسته گوییم اگر $\lim_{(x,y)\to(x_۰,y_۰)}f(x,y)=f(x_۰,y_۰)$.

مثال) تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & x^{۲}+y^{۲}\neq ۰\\ ۱ & x=y=۰\end{cases}$ در مبدا پیوسته نیست.

حل: تابع در نقطه $(۰,۰)$ دارای مقدار یک است اما در این نقطه حد وجود ندارد زیرا روی مسیرهای $y=mx$ داریم

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{x^{۲}-(mx)^{۲}}{x^{۲}+(mx)^{۲}}=\frac{x^{۲}(۱-m^{۲})}{x^{۲}(۱+m^{۲})}=\frac{۱-m^{۲}}{۱+m^{۲}}$$

چون مقدار تابع روی مسیرهای $y = mx$ به مقدار m وابسته است لذا تابع در نقطه $(0,0)$ حد ندارد. و در نتیجه پیوسته نیست.

۱-۴. مشتقات جزئی

تابع $z = f(x,y)$ و نقطه (x_0,y_0) در دامنه تابع f مفروض است. اگر روی خط $y = y_0$ (y_0 عدد حقیقی ثابت است) در دامنه حرکت کنیم به تابع تک متغیره $f(x) = f(x,y_0)$ می‌رسیم که می‌توان نسبت به x از آن مشتق گرفت. مشتق حاصل در $x = x_0$ را مشتق جزئی تابع f نسبت به x گوییم و با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ نشان می‌دهیم.

مثال: برای تابع $f(x,y) = 1 + x^2 y$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا بجای y مقدار ۲ را قرار می‌دهیم در این صورت داریم $f(x) = f(x,2) = 1 + 2x^2$ حال از f نسبت به x مشتق می‌گیریم و داریم $f'(x) = 4x$ در نتیجه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4x \,\Big|_{x=1} = 4$$

در حالت کلی برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

بصورت مشابه اگر روی خط $x = x_0$ (x_0 عدد حقیقی ثابت است) در دامنه حرکت کنیم به تابع تک متغیره $f(y) = f(x_0,y)$ می‌رسیم که می‌توان نسبت به y از آن مشتق گرفت. مشتق حاصل در نقطه $y = y_0$ را مشتق جزئی تابع f نسبت به y گوییم و با نماد $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ نشان می‌دهیم.

مثال: برای تابع $f(x,y) = \sin(x^2 y)$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا بجای x مقدار ۱ را قرار می‌دهیم در این صورت داریم $f(y) = f(1,y) = \sin(y)$ حال از f نسبت به y مشتق می‌گیریم و داریم $f'(y) = \cos y$ در نتیجه

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = \cos y \,\big|_{y=\pi} = \cos \pi = -1$$

در حالت کلی برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

روش محاسبه مشتقات جزئی توابع

برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ از ضابطه f با فرض ثابت بودن y نسبت به x مشتق می‌گیریم اما اگر در این فرایند مشکلی ایجاد شد (مثلا حالت تقسیم بر صفر) باید از تعاریف بالا استفاده کنیم و بصورت مشابه برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}$ از ضابطه f با فرض ثابت بودن x نسبت به y مشتق می‌گیریم.

نکته: $\frac{\partial f}{\partial x}$ را با نمادهای f_x ، f'_x ، f_1 ، $D_1 f$ و $D_x f$ نیز نشان می‌دهند بصورت مشابه $\frac{\partial f}{\partial y}$ را با نمادهای f_y ، f'_y ، f_2 ، $D_2 f$ و $D_y f$ نیز نشان می‌دهند.

مثال: برای هر یک از توابع زیر مقادیرمشتقات جزئی نسبت به x و y را محاسبه کنید.

الف) $f(x,y) = x\cos 2y + ye^{2x}$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos 2y + 2ye^{2x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x\sin 2y + e^{2x}$$

ب) $z = e^{-2x}\ln xy$

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2e^{-2x}\ln xy + \frac{y}{xy}e^{-2x} = -2e^{-2x}\ln xy + \frac{1}{x}e^{-2x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{xy}e^{-2x} = \frac{1}{y}e^{-2x}$$

پ) $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+y^۲}}=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲y}{۲\sqrt{x^۲+y^۲}}=\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

مثال: برای تابع $z=\frac{x^۲}{y}-\frac{x}{x+y}$ حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{y}-\frac{x+y-x}{(x+y)^۲} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^۲}{y^۲}-\frac{-x}{(x+y)^۲}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=x(\frac{۲x}{y}-\frac{x+y-x}{(x+y)^۲})+y(-\frac{x^۲}{y^۲}-\frac{-x}{(x+y)^۲})\\&=\frac{۲x^۲}{y}-\frac{xy}{(x+y)^۲}-\frac{x^۲}{y}+\frac{xy}{(x+y)^۲}\\&=\frac{x^۲}{y}\end{aligned}$$

مثال: برای تابع $z=y\ln(x^۲-y^۲)$ نشان دهید $\frac{۱}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^۲}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{2x}{x^2 - y^2} \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) + y\frac{-2y}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}(y\frac{2x}{x^2 - y^2}) + \frac{1}{y}(\ln(x^2 - y^2) + y\frac{-2y}{x^2 - y^2})$$

$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{1}{y}\ln(x^2 - y^2) \qquad \left(z = y\ln(x^2 - y^2)\right)$$

$$= \frac{z}{y^2}$$

اگر $z = f(x,y)$ آنگاه f_x و f_y خود توابعی از x و y هستند و لذا می توان دوباره از آنها نسبت به x و y مشتق گرفت مشتق f_x نسبت به x را با f_{xx} و یا $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ نشان می‌دهیم بصورت مشابه مشتق f_y نسبت به y را با f_{yy} و یا $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ نشان می‌دهیم. برای نمایش مستق f_x نسبت به y از نماد f_{xy} و یا $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و برای نمایش مستق f_y نسبت به x از نماد f_{yx} و یا $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ استفاد می‌کنیم.

مثال: برای تابع $f(x,y) = e^{x^2 - y}$ مقادیر $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f_x(x,y) = 2xe^{x^2-y} \Rightarrow f_{xx}(x,y) = 2e^{x^2-y} + 4x^2e^{x^2-y} = 2(2x^2 + 1)e^{x^2-y}$$

$$f_y(x,y) = -e^{x^2-y} \Rightarrow f_{yy}(x,y) = e^{x^2-y}$$

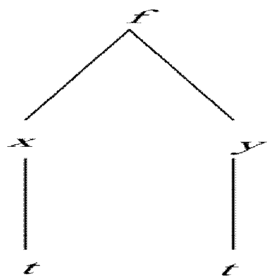
$$f_x(x,y) = 2xe^{x^2-y} \Rightarrow f_{xy}(x,y) = -2xe^{x^2-y}$$

$$f_y(x,y) = -e^{x^2-y} \Rightarrow f_{yx}(x,y) = -2xe^{x^2-y}$$

۱-۵. قاعده مشتق زنجیره‌ای

فرض کنید تابع f تابعی از دو متغیر x و y باشد و متغیرهای x و y خود توابعی از متغیر t باشند و بخواهیم مشتق تابع f را نسبت به t محاسبه کنیم، در این حالت f تابعی از t است و x و y واسطه هستند و داریم

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$



تذکر: هر گاه f تابعی از چند متغیر باشد برای مشتق گیری از f نسبت به یک متغیر خاص مثلا x از نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ استفاده می‌شود و هر گاه f تابعی از یک متغیر باشد برای نمایش مشتق آن نسبت به متغیر از نماد $\frac{df}{dx}$ استفاده می‌شود

مثال: اگر $f(x,y)=xe^{y}$ و $x=\sin t$ و $y=\ln t$ مطلوب است محاسبه $\frac{df}{dt}(t=\frac{\pi}{2})$.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{y}=e^{\ln t}=t,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{y}=\sin te^{\ln t}=t\sin t$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

$$=t\times\cos t+t\sin t\times\frac{1}{t}=t\cos t+\sin t$$

بنابراین داریم

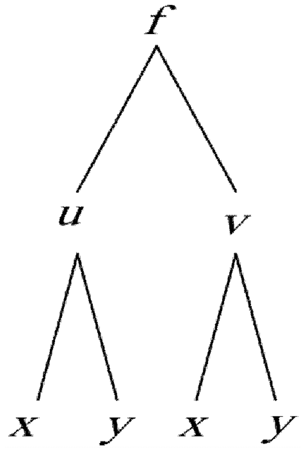
$$\frac{df}{dt}(t=\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2})=1$$

اگر f تابعی از دو متغیر u و v باشد و u و v خود توابعی از دو متغیر دیگر مانند x و y باشند آنگاه f تابعی از x و y بوده و u و v واسطه محسوب می‌شوند و داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}$$



مثال: فرض کنید $f(u,v) = uv^{۲}$ و $u = \sin(xy)$ و $v = \cos(xy)$ مطلوب است محاسبه f_x و f_y.

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= v^{۲} = \cos^{۲}(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = ۲uv = ۲\sin(xy)\cos(xy) = \sin(۲xy) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= y\cos(xy), \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -y\sin(xy) \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \cos^{۲}(xy) \times y\cos(xy) + \sin(۲xy) \times (-y\sin(xy)) \\
&= y\cos^{۳}(xy) - y\sin(۲xy)\sin(xy)
\end{aligned}$$

و

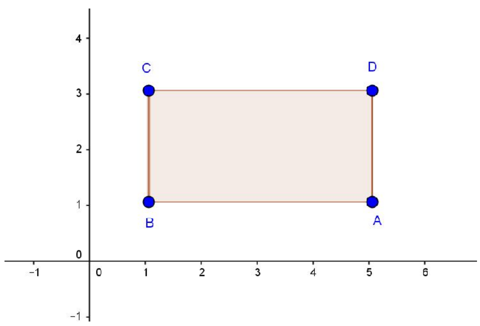
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \cos^{۲}(xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \sin(۲xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(xy), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -x\sin(xy)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \cos^{۲}(xy)\times x\cos(xy) + \sin(۲xy)\times(-x\sin(xy))\\ &= x\cos^{۳}(xy) - x\sin(۲xy)\sin(xy)\end{aligned}$$

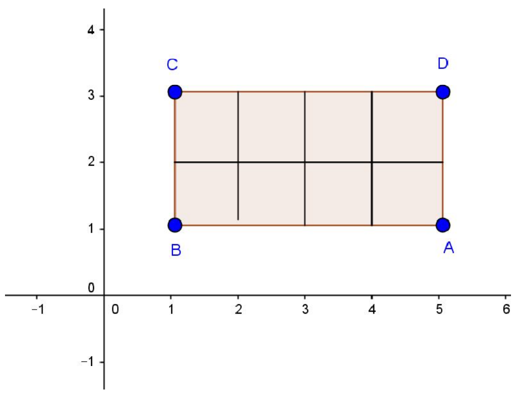
۱-۶. انتگرال دوگانه

تابع $z = f(x,y)$ و ناحیه مستطیل شکل $D \subseteq D_f$ به صورت زیر مفروض هستند



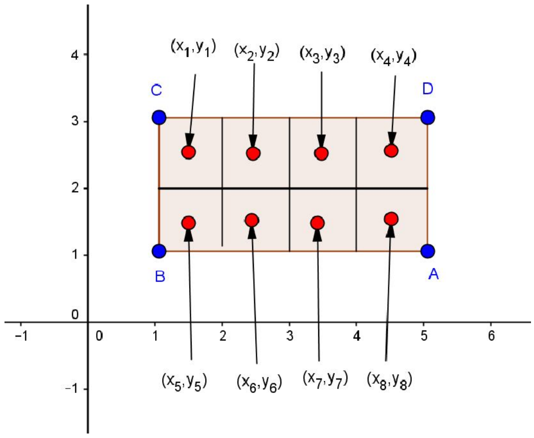
شکل ۱۰: ناحیه انتگرالگیری

این ناحیه مستطیلی را به ۸ قسمت به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.



شکل ۱۱:تقسیم ناحیه انتگرالگیری به قسمت های کوچکتر

در ادامه مرکز هر کدام از مربع ها را محاسبه می‌کنیم



شکل ۱۲ : محاسبه مرکز هر یک از واحدهای کوچکتر

در انتها مقادیر تابع f را در هر کدام از نقاط مراکز مربعها محاسبه کرده و مجموع آنها را در نظر می‌گیریم

$$\sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)$$

حا اگر تعداد مربعهایی که مرکز آنها را در نظر گرفتیم افزایش دهیم تعداد نقاط بیشتری حاصل می شود و در نتیجه مجموع تعداد جملات بیشتری را شامل می شود. اگر به همین طریق ادامه دهیم و در هر مرحله تعداد مربع ها را افزایش دهیم به تناسب تعداد جملات مجموع نیز افزایش می‌یابد اگر تعداد مربع ها به سمت بی نهایت میل کند آنگاه تعداد جملات مجموع نیز به سمت بی نهایت میل می‌کند در این حالت اگر مجموع به سمت یک عدد حقیقی میل کند می‌گوییم انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D موجود است و مقدار آن که همان عددی است که مجموع به آن میل می‌کند را با $\int_D \int f(x,y)\, dA$ نشان می‌دهیم.

نکات:

۱. لزمی ندارد که ناحیه D حتما به شکل مستطیل باشد بلکه ناحیه فوق هر شکلی در صفحه $\mathbb{R}^2$ می‌تواند داشته باشد تنها شرط آن است که ناحیه داده شده محدود باشد یعنی بتوان ناحیه داده شده را درون دایره ای با شعاع مشخص قرار داد.

۲. برای اینکه انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D موجود باشد باید f روی D پیوسته و یا نقاط ناپیوستگی f روی D متناهی باشد.

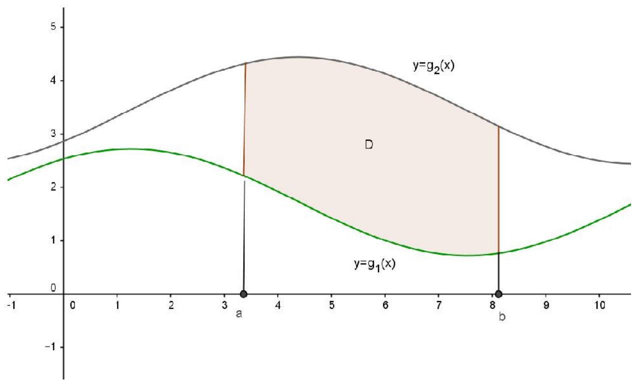
۳. در انتگرال دو گانه $\int_D \int f(x,y)\, dA$ اگر $f(x,y) = 1$ حاصل انتگرال برابر مساحت ناحیه D خواهد بود.

۴. اگر $f(x,y)\geq 0$ آنگاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ برابر حجم محدود زیر نمودار $z=f(x,y)$ و بالای ناحیه D است.

قضیه: اگر ناحیه D به صورت

$$D=\{(x,y): a\leq x\leq b,\quad g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$$

باشد یعنی ناحیه ای به شکل



شکل ۱۳: ناحیه انتگرالگیری $D=\{(x,y): a\leq x\leq b,\quad g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$

باشد در این صورت داریم

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

برای محاسبه انتگرال بالا ابتدا نسبت به y انتگرال گرفته و پس از جایگذاری $g_2(x)$ و $g_1(x)$ بجای y از حاصل نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

مثال: انتگرالهای دوگانه زیر را حل کنید.

الف) $\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dydx$

حل:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=x^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}dy=x^2(-\frac{1}{y})_{\frac{1}{x}}^{x}=-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{\frac{1}{x}})=-x^2(\frac{1}{x}-x)=-x+x^3$$

بنابراین داریم

$$\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dydx=\int_1^2(-x+x^3)dx$$

$$=(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)\Big|_1^2$$

$$=(-\frac{1}{2}2^2+\frac{1}{4}2^4)-(-\frac{1}{2}1^2+\frac{1}{4}1^4)$$

$$=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

ب) $\int_1^e\int_0^{\ln x} ydydx$

حل:

$$\int_0^{\ln x} ydy=\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\ln x}=\frac{1}{2}(\ln^2 x-0)=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

بنابراین

$$\int_1^e\int_0^{\ln x} ydydx=\int_1^e\frac{1}{2}\ln^2 xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e\ln^2 xdx \qquad \left(\int\ln^2 x=x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)_1^e$$

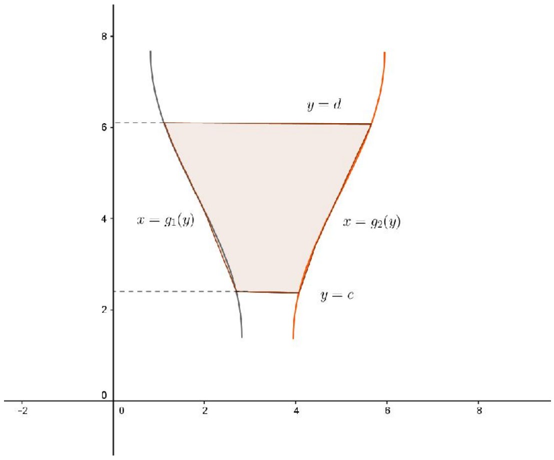
$$=\frac{1}{2}((e\ln^2 e-2e\ln e+2e)-(1\ln^2 1-2\ln 1+2))$$

$$=\frac{1}{2}(e-2)$$

قضیه: اگر ناحیه D به صورت

$$D=\{(x,y):c\leq y\leq d,\quad g_1(y)\leq x\leq g_2(y)\}$$

باشد یعنی ناحیه ای به شکل



شکل ۱۴ : بیان ناحیه انتگرالگیری به صورت $D = \{(x,y) : c \le y \le d, \quad g_۱(y) \le x \le g_۲(y)\}$

باشد در این صورت داریم

$$\int\int_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{g_۱(y)}^{g_۲(y)} f(x,y)dxdy$$

برای محاسبه انتگرال بالا ابتدا نسبت به x انتگرال گرفته و پس از جایگذاری $g_۲(y)$ و $g_۱(y)$ بجای x از حاصل نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

مثال: انتگرالهای دو گانه زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^۱ \int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^y}{y} ۳xdxdy$

حل:

$$\int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^y}{y} ۳xdx = \frac{۳e^y}{y} \int_y^{\sqrt{y}} xdx = \frac{۳e^y}{y}(\frac{۱}{۲}x^۲)\,|_y^{\sqrt{y}} = \frac{۳e^y}{۲y}(y - y^۲) = \frac{۳e^y}{۲}(۱ - y)$$

بنابراین

$$\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^y}{y} 3xdxdy = \int_0^1 \frac{3e^y}{2}(1-y)dy$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^y(1-y)dy$$
$$= \frac{3}{2}(-\int_0^1 ye^y dy + \int_0^1 e^y dy) \qquad \left(\int ye^y dy = ye^y - e^y\right)$$
$$= \frac{3}{2}(-(ye^y - e^y)\Big|_0^1 + (e^y)\Big|_0^1)$$
$$= \frac{3}{2}\Big(-((e-e)+(e^0)) + (e^1 - e^0)\Big)$$
$$= \frac{3}{2}(-1+e-1) = \frac{3}{2}(e-2)$$

ب) $\int_1^2\int_0^\infty e^{-xy}dxdy$

حل:

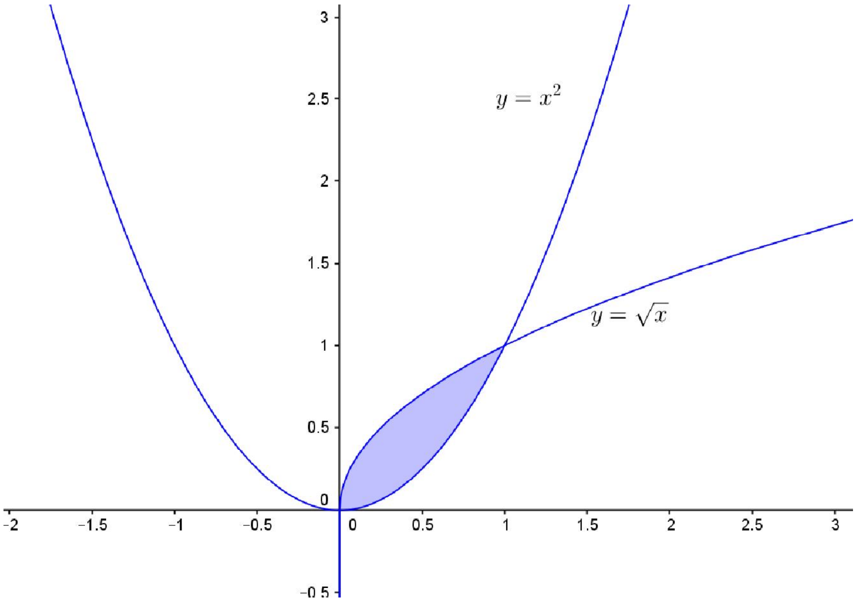
$$\int_0^\infty e^{-xy}dx = (-\frac{1}{y}e^{-xy})\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{y}e^{-xy} + \frac{1}{y}e^{-0\times y})$$
$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\lim_{x\to\infty} e^{-xy} \qquad (1 \le y \le 2)$$
$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\times 0 = \frac{1}{y}$$

بنابراین داریم

$$\int_1^2\int_0^\infty e^{-xy}dxdy = \int_1^2 \frac{1}{y}dy = (\ln y)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

مثال: مساحت محصور بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ را به کمک انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

حل: می دانیم که اگر در انتگرال دوگانه $\int\int_D f(x,y)\, dA$ اگر $f(x,y) = ۱$ باشد آنگاه مقدار حاصل از انتگرال برابر مساحت ناحیه D خواهد بود. ناحیه‌ای که انتگرالگیری روی آن انجام می‌شود را در زیر می‌بینید.



شکل ۱۵: مساحت محصور بین دو منحنی $y = x^۲$ و $y = \sqrt{x}$

برای محاسبه نقاط برخورد دو منحنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^۲ = \sqrt{x} \Rightarrow x^٤ = x \Rightarrow x^٤ - x = ۰$$

$$\Rightarrow x(x^۳ - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰, \quad x = ۱$$

بنابراین مساحت ناحیه برابر است با

$$\int\int_D x dA = \int_۰^۱ \int_{x^۲}^{\sqrt{x}} dy dx$$

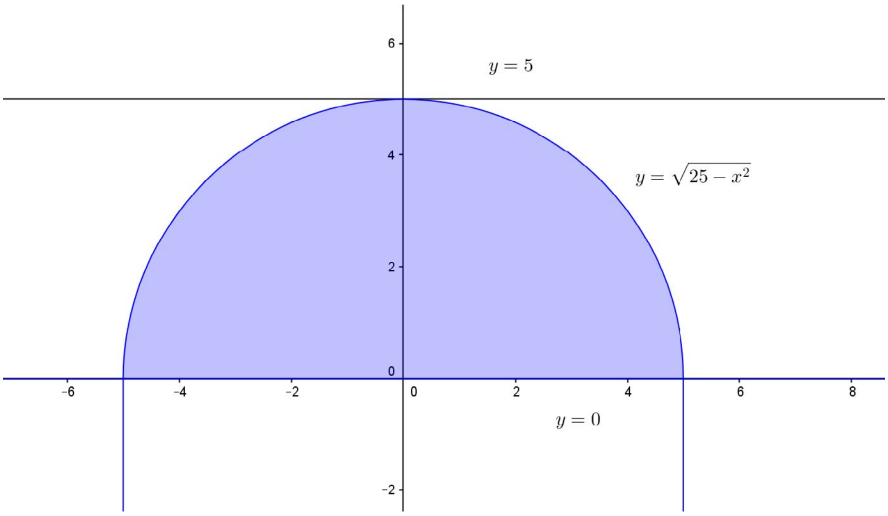
$$\int_{x^۲}^{\sqrt{x}} dy = (y) \Big|_{x^۲}^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x^۲$$

درنتیجه

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$
$$= (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\int_D \int dA$ که D ناحیه مشخص شده در شکل زیر است.

حل:



شکل ۱۶: ناحیه انتگرالگیری

ابتدا در نمودار داده شده x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم

$$y = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 25 - y^2$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{25 - y^2}$$

بنابراین داریم

$$\int_D \int dA = \int_0^5 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dxdy$$

می توان انتگرال فوق را محاسبه کرد ولیکن در این مثال راه ساده‌تری وجود دارد و آن اینکه چون در این مثال $f(x,y)=۱$ لذا مقدار انتگرال با مساحت ناحیه D برابر است لذا کافی است مساحت ناحیه را محاسبه کنیم.

اما ناحیه داده شده یک نیم دایره به مرکز $(۰,۰)$ وشعاع ۵ است بنابراین داریم

$$\int_D\int dA=\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}=\frac{۱}{۲}\pi ۵^{۲}=\frac{۲۵}{۲}\pi$$

۱-۷. مقادیر متوسط و موثر شکل موج

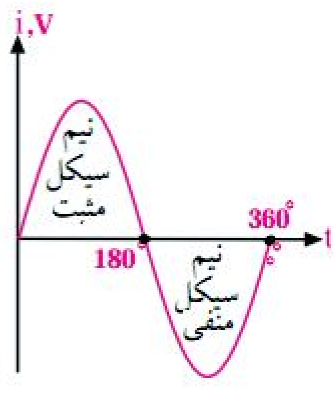
۱-۷-۱. مقدار متوسط موج

به میانگین مقادیر (ولتاژ یا جریان) لحظه‌ای سیگنال متناوب، متوسط موج می‌گویند آن را با I_{ave} برای جریان متوسط و V_{ave} برای ولتاژ متوسط نشان می دهند و معمولا آن را برای یک دوره تناوب محاسبه می‌کنند. از نظر ریاضی مقدار متوسط موج به صورت

$$I_{ave}=\frac{\int_T i(t)dt}{T}$$

تعریف می‌شود.

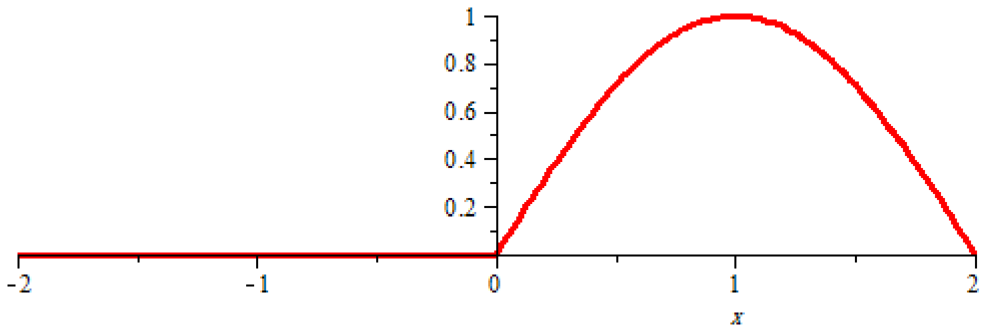
مقدار متوسط یک موج سینوسی کامل برابر صفر است



شکل ۱۷: مقدار متوسط موج سینوسی کامل

مثال: مقدار متوسط موج سینوسی یکسو شده $f(x) = \begin{cases} ۰ & -۲ < x < ۰ \\ \sin\frac{\pi}{۲}x & ۰ \le x \le ۲ \end{cases}$ را بیابید.

حل:



شکل ۱۸: نمودار تابع $y = f(x)$

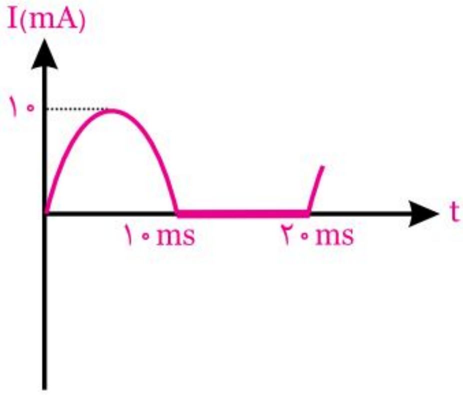
$$\begin{aligned} f_{ave} &= \frac{\int_{-۲}^{۲} f(x)dx}{٤} \\ &= \frac{\int_{۰}^{۲} \sin\frac{\pi}{۲}x\ dx}{٤} \\ &= \frac{۱}{٤} \times (-\frac{۲}{\pi}\cos(\frac{\pi}{۲}x))\ |_{۰}^{۲} \\ &= -\frac{۱}{۲\pi}(\cos\pi - \cos ۰) \\ &= \frac{۱}{\pi} \end{aligned}$$

مثال: مقدار متوسط موج مربعی با معادله $f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۳ \\ ۰ & ۳ \le x \le ٦ \end{cases}$ را بیابید.

حل:

$$f_{ave}=\frac{\int_{۰}^{۶} f(x)dx}{۶}=\frac{\int_{۰}^{۳} ۱\, dx}{۶}=\frac{۱}{۶}\times ۳=\frac{۱}{۲}$$

مثال: مقدار متوسط جریان موجی که در تصویر زیر قراردارد را بدست آورید.



شکل ۱۹: موج سینوسی نیم موج

حل: معادله موج عبارت است از

$$i(t)=I_{\max}\sin(\frac{۲\pi}{T}t)=۱۰\sin(\frac{۲\pi}{۲۰}t)=۱۰\sin(\frac{\pi}{۱۰}t)$$

بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
i_{ave} &= \frac{\int_{0}^{20} i(t)\, dt}{20} \\
&= \frac{\int_{0}^{10} 10\sin(\frac{\pi}{10}t)\, dt}{20} \\
&= \frac{\int_{0}^{10} \sin(\frac{\pi}{10}t)\, dt}{2} \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{10}{\pi}\cos(\frac{\pi}{10}t))\,|_{0}^{10} \\
&= -\frac{5}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) \\
&= \frac{10}{\pi} = 3.184\ mA
\end{aligned}
$$

۱-۷-۲. مقدار موثر موج

اگر ولتاژ برق شهر که یک ولتاژ سینوسی ۲۲۰ ولت با فرکانس ۵۰ هرتز است را به یک اسیلوسکوپ بدهیم خواهیم دید که دامنه این ولتاژ $220\sqrt{2}$ یا 310.2 ولت است. مسلما ۲۲۰ ولت مقدار متوسط ولتاژ برق شهر نیست زیرا مقدار متوسط موج سینوسی صفر است. ۲۲۰ ولت مقدار موثر این ولتاژ سینوسی است این مقدار میزان موثر بودن یک منبع در تحویل توان به بار مقاومتی را نشان می دهد به عنوان مثال توانی که یک جریان با مقدار موثر یک آمپر به یک مقاومت می دهد همان توانی است که جریان مستقیم یک آمپر به آن می دهد.

مقدار موثر یک موج را با I_{rms} برای جریان موثر و V_{rms} برای ولتاژ موثر نشان می دهند. از نظر ریاضی مقدار متوسط موج به صورت

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{T} i^{2}(t)dt}$$

تعریف می‌شود.

مثال: مقدار موثر ولتاژ یک موج سینوسی با معادله $v(t) = v_{\max}\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ را بدست آورید.

حل:

$$
\begin{aligned}
I_{rms} &= \sqrt{\frac{۱}{T}\int_T i^۲(t)dt} \\
&= \sqrt{\frac{۱}{T}\int_۰^T v_{\max}^۲ \sin^۲(\frac{۲\pi}{T}t)\ dt} \\
&= \sqrt{\frac{v_{\max}^۲}{T}\int_۰^T \frac{۱-\cos(\frac{٤\pi}{T}t)}{۲}\ dt} \\
&= v_{\max}\sqrt{\frac{۱}{T}\left(\frac{۱}{۲}t-\frac{۱}{۲}\times\frac{T}{٤\pi}\sin(\frac{٤\pi}{T}t)\right)_۰^T} \\
&= v_{\max}\sqrt{\frac{۱}{۲T}\left(T-\frac{T}{٤\pi}\sin(\frac{٤\pi}{T}\times T)\right)} \\
&= v_{\max}\sqrt{\frac{۱}{۲T}T} = \frac{V_{mX}}{\sqrt{۲}} = ۰.۷۰۷v_{\max}
\end{aligned}
$$

مسائل

۱. حدود توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(e,۰)} \ln\frac{x^۲}{y+۱}$ جواب: ۲

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(٤,\pi)} x^۲\sin\frac{y}{x}$ جواب: $۸\sqrt{۲}$

پ) $\lim\limits_{(x,y)\to(۲,-۲)} \frac{٤-x^۲}{y+۲}$ جواب: وجود ندارد.

ت) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y}$ جواب: وجود ندارد.(راهنمایی: مسیر $y=x^۳-x^۲$ را همراه یک مسیر دیگر بررسی کنید.)

۲. پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید.

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+y} & x^2+y\neq 0\\ 1 & x^2+y=0\end{cases}$ در نقطه $(1,-1)$ — جواب: ناپیوسته است

۳. مشتقات جزئی خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) اگر $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ آنگاه $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را نقطه $(2,-1)$. — جواب: -6

ب) اگر $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(||x|-|y||-|x|-|y|)$ آنگاه $f_y(0,0)$. — جواب: صفر

پ) اگر $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ آنگاه $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — جواب: صفر

ت) اگر $f(x,y)=\sin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ آنگاه $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$ — جواب: $-\dfrac{y}{x}$

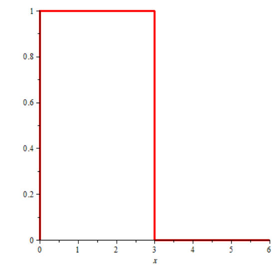
۴. انتگرالهای خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+y^2)\,dxdy$ — جواب: $\dfrac{36}{105}$

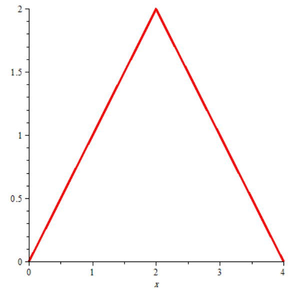
ب) $\int_0^1\int_1^x x^2e^{xy}dydx$ — جواب: $\dfrac{1}{2}e-\dfrac{3}{2}$

۵. مقدار موثر هر یک از موج های زیررا محاسبه کنید؟

الف) $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<3\\ 0 & 3\leq x\leq 6\end{cases}$ (موج مربعی)



ب) $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 2 \\ 4 - x & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ (موج مثلثی)



پ) $f(x) = 2x - 1$ با دوره تناوب ۲ (موج دندانه اره ای)