به نام خداوند جان و خرد

علامت عضو بودن در یک مجموعه را با نماد $\in$ و علامت عضو نبودن در یک مجموعه را با نماد $\notin$

زیر مجموعه : اگر A و B دو مجموعه باشند بطوریکه هر عضو A عضوی از B باشد،در این صورت می گوییم

A زیر مجموعه ی B است و می نویسیم $A \subseteq B$

نمایش مجموعه های اعداد :

الف) مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N} = \{$ ۱ و ۲ و ۳ و . . . $\}$

ب) مجموعه اعداد حسابی : $\mathbb{W} = \{$ ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و . . . $\}$

ج) مجموعه اعداد طبیعی فرد : $\mathbb{O} = \{$ ۱ و ۳ و ۵ و . . . $\}$

د) مجموعه اعداد طبیعی زوج : $\mathbb{E} = \{$ ۲ و ۴ و ۶ و . . . $\}$

ه) مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z} = \{$ . . . و ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و . . . $\}$

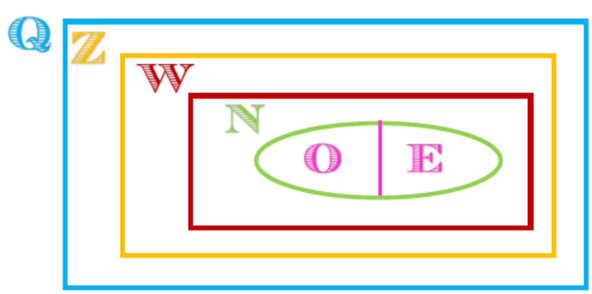
و) مجموعه اعداد گویا : $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} , b \neq ۰ \}$

☺ هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

☺ همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هستند؛ بنابراین $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

نکته : نمودار وِن مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است ،

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

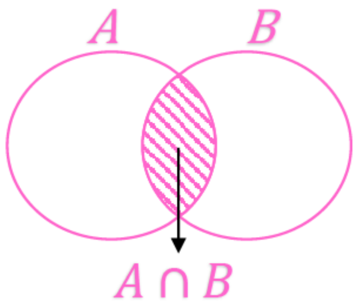


عضوهای مجموعه ی A متعلق به مجموعه ی اعداد طبیعی هستند و از ۳بزرگتر و از ۸ کوچکترند،یعنی

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid ۳ < x < ۸ \}$

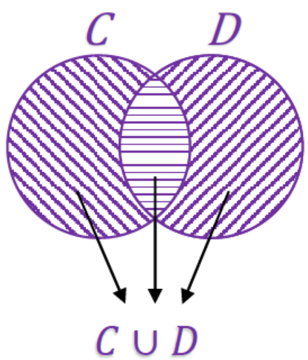
علامت " | " در نمایش ریاضی مجموعه ها به معنی به طوریکه یا به قسمی که می باشد.

اشتراک دو مجموعه ی B و A، مجموعه ای است که عضوهای آن هم در A و هم در B باشد.



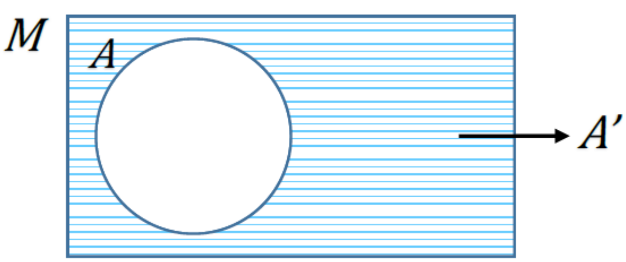
$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \,,\, x \in B \,\}$$

اجتماع دو مجموعه ی C و D،مجموعه ای است که عضوهای آن یا در C و یا در D و یا در هر دو باشد.(حداقل در یکی از دو مجموعه باشد)



$$C \cup D = \{\, x \mid x \in C \text{ یا } x \in D \,\}$$

متمم یک مجموعه :اگر A زیر مجموعه ی مجموعه ی مرجع باشد،A' را متمم مجموعه ی A گوییم که شامل عضوهایی است که در مجموعه ی مرجع باشد ولی این عضوها در مجموعه ی A نباشند.



$$A' = \{\, x \mid x \in M \,,\, x \notin A \,\}$$

نکته : $A' = M - A$

مجموعه‌های اعداد ◄ به مجموعه‌های زیر توجه کنید:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی : $N = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

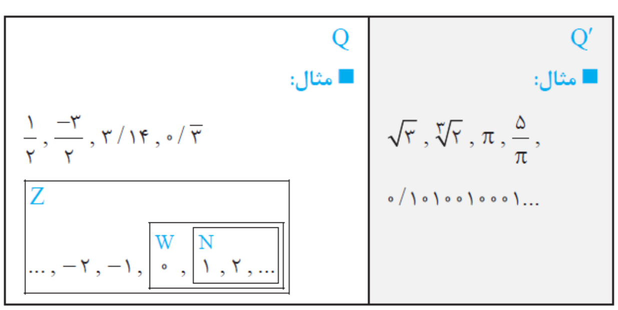
مجموعه‌ی اعداد حسابی : $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$

مجموعه‌ی اعداد صحیح : $Z = \{..., -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ...\}$

مجموعه‌ی اعداد گویا : $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, b \neq ۰ \right\}$

مجموعه‌ی اعداد گنگ : $Q' =$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی که گویا نیستند

مجموعه‌ی اعداد حقیقی : $R = Q \cup Q'$



نماد	به معنی	مثال
$\cap$	اشتراک	$N \cap Z = N \ , \ Q \cap Q' = \varnothing$
$\cup$	اجتماع	$N \cup Z = Z \ , \ Q \cup Q' = R$
$-$	تفاضل	$W - N = \{۰\} \ , \ N - W = \varnothing$ $R - Q = Q'$

نماد	به معنی	مثال
$\in$ $(\notin)$	عضویت (عدم عضویت)	$\sqrt{۲} \in Q' \ , \ \frac{۱}{۲} \in Q \ , \ ۰/۲۲۲... \in Q$ $-۷ \notin N \ , ۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲... \notin Q$
$\subset$ $(\not\subset)$	زیرمجموعه بودن (زیرمجموعه نبودن)	$N \subset W \ , \ Q' \subset R \ , Z \subset Q$ $N \not\subset Q' \ , \ Q \not\subset Q' \ , Z \not\subset N$

نقیض یک گزاره

نقیض گزارهٔ p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد، در این‌صورت، ارزش گزارهٔ $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «$\sim$» **ناقض** گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است. در این حالت می‌گوییم : دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $p \equiv \sim(\sim p)$.

در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند می‌نویسیم : $p \equiv q$ و می‌خوانیم : p هم ارز است با q.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزارهٔ مرکب « $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اوّل نیست» که از ترکیب دو گزارهٔ ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p \vee q$» می‌نویسند، **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\vee$» **فاصل** گفته می‌شود.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p \wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» **عاطف** گفته می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $(p\vee q)\sim$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان‌اند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی **قانون دمورگان** گفته می‌شود.

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « $p\Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

خواندنی

گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

۲ گزارهٔ «$q\Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p\Rightarrow q$» و گزارهٔ $\sim q\Rightarrow\sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p\Rightarrow q$ است.

گزاره‌هایی نظیر $(p\Rightarrow p)$ یا $(p\vee\sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $(p\wedge\sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال : ثابت کنید اگر $a\in\mathbb{Z}$ و $a^۲$ عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

($a^۲$ عددی زوج است $\Leftarrow a$ عددی زوج است) $\equiv$ (a عددی فرد است $\Leftarrow a^۲$ عددی فرد است)

اگر a عددی زوج باشد، یعنی $a=۲k$، خواهیم داشت :

$$a^۲=(۲k)^۲=۴k^۲=۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k'\in\mathbb{Z}'}=۲k'$$

در نتیجه $a^۲$ عددی زوج است.

ترکیب دو شرطیِ دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

سورها

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف‌اند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$[1] و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$[2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین، گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره : « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ نقیض آن، یعنی : $\sim (\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزارهٔ $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است؛ بنابراین ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim (\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim (\forall x ; P(x)) \equiv \exists x ; \sim P(x)$$

در این صورت، نقیض گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که سور وجودی دارد، به صورت زیر نوشت :

$$\sim (\exists x ; P(x)) \equiv \forall x ; \sim P(x)$$

تلفظ صحیح الفبای یونانی

$A\ \alpha$ =آلفا   Bβ=بتا

$\Gamma\ \gamma$ =گاما   Δδ=دلتا

$E\ \varepsilon$ =اپسیلون   Zζ=زتا

$\Theta\ \theta$ =تتا   Iι=یوتا

$K\ \kappa$ =کاپا   Λλ=لاندا

$M\ \mu$ =مو   Nν=نو

$\Xi\ \xi$ =کسی   Oο=اومیکرون

$\Pi\ \pi$ =پی   Pρ=رو

$\Sigma\ \sigma$ =سیگما   Tτ=تاو

$\Upsilon\ \upsilon$ =اوپسیلون   Φϕ=فی

$X\ \chi$ =خی   Ψψ=سای $\Omega\ \omega$ =امگا

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$
$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)\cdot(b + c)\cdot(c + a)$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)\cdot(a + b)\cdot(a^2 + b^2)$$

Prefiks	**Symbol**	**Multiplying Factor**
Yotta	Y	$1000000000000000000000000 = 10^{24}$
Zetta	Z	$1000000000000000000000 = 10^{21}$
Exa	E	$1000000000000000000 = 10^{18}$
Peta	P	$1000000000000000 = 10^{15}$
Tera	T	$1000000000000 = 10^{12}$
Giga	G	$1000000000 = 10^{9}$
Mega	M	$1000000 = 10^{6}$
Kilo	k	$1000 = 10^{3}$
Hecto	h	$100 = 10^{2}$
Dega	da	$10 = 10^{1}$
Deci	d	$0.1 = 10^{-1}$
Centi	c	$0.01 = 10^{-2}$
Milli	m	$0.001 = 10^{-3}$
Mikro	μ	$0.000001 = 10^{-6}$
Nano	n	$0.000000001 = 10^{-9}$
Piko	p	$0.000000000001 = 10^{-12}$
Femto	f	$0.000000000000001 = 10^{-15}$
Atto	a	$0.000000000000000001 = 10^{-18}$
Zepto	z	$0.000000000000000000001 = 10^{-21}$
yocto	y	$0.000000000000000000000001 = 10^{-24}$

$\mathbb{R}^۲$ یا همان صفحه

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) که $a,b\in\mathbb{R}$ مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به‌صورت زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با $\mathbb{R}^۲$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$\mathbb{R}^۲=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

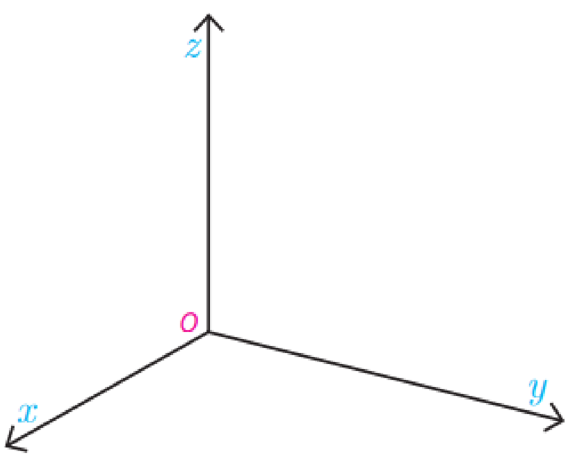
حال به سراغ فضای $\mathbb{R}^۳$ می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای $\mathbb{R}^۳$ و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیرید.

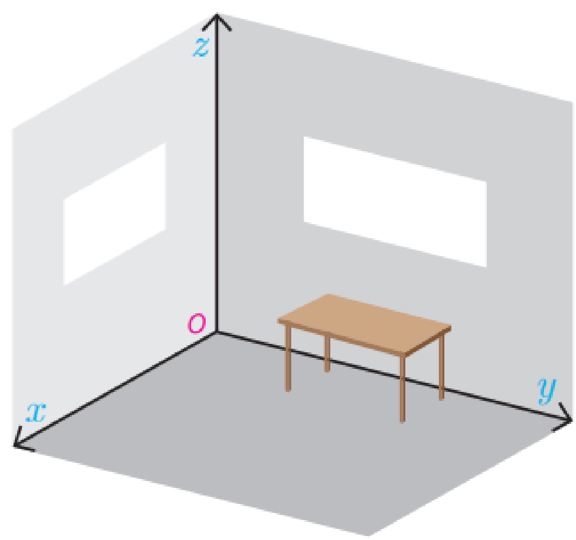
معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مشابه $\mathbb{R}^2$ می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط $\mathbb{R}^2$ از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم xها و yها استفاده می‌شود. به‌طور مشابه می‌توان فضای $\mathbb{R}^3$ را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دوعمود برهم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محوردو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج[1] می‌دهند.

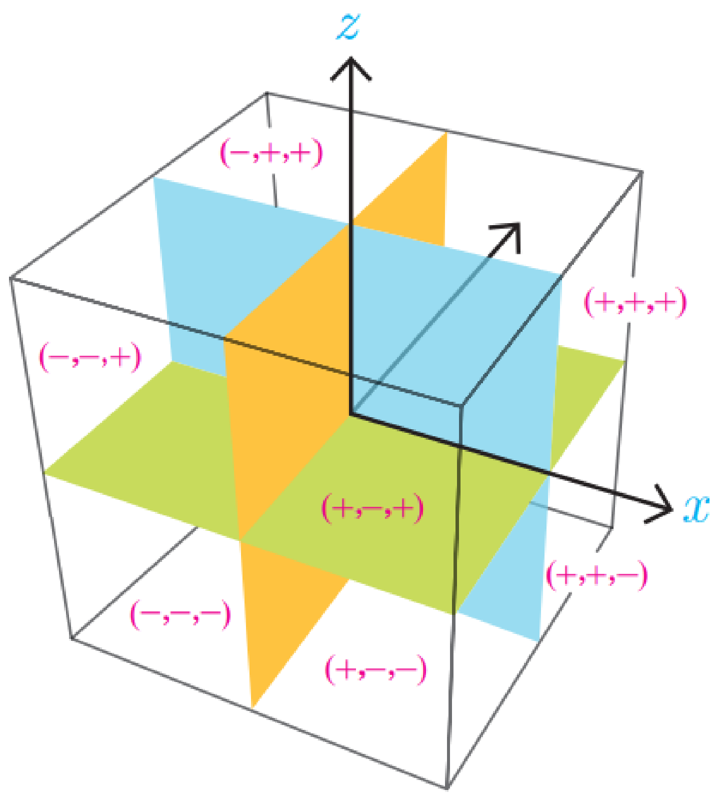




محورهای Ox ، Oy و Oz به ترتیب محور xها، محور yها و محور zها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور xها و yها، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور yها و zها، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور xها و zها هستند. جهت مثبت هریک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه O) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه $\mathbb{R}^3$ به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره‌گذاری استاندارد یک دستگاه $\mathbb{R}^2$ شماره‌گذاری می‌شوند.

مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره‌گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−



z
x
(−,+,+)
(+,+,+)
(−,−,+)
(+,−,+)
(+,+,−)
(−,−,−)
(+,−,−)

۱.۶ تابع

در این بخش ابتدا تعریف رسمی تابع را یادآوری و سپس برخی از مفاهیم مـرتبط بـا آن را مطرح می‌کنیم.

۱.۱.۶ تعریف

رابطه‌ی F از A به B یعنی $F \subseteq A \times B$، را **تابع** می‌نامیم اگر هر عضو A مؤلفه‌ی اول دقیقاً یک عضو F باشد. یعنی،

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B),\ \ (x, y) \in F \qquad (۱)$$

$$(x, y_1), (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2 \qquad (۲)$$

معمولاً، نه لزوماً، حروف کوچک را برای نمادگذاری توابع به کار می‌بریم و اگر رابطه‌ی $f \subseteq A \times B$ تابع باشد، و تنها در این صورت، می‌نویسیم

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{یا} \quad f : A \to B$$

۳.۱.۶ تذکر

رابطه‌ای را از A به B که در شرط **۱** تابع صدق نکند ولی دارای ویژگی **۲** تابع باشد، **تابع جزئی** می‌نامند و آن‌را با نمادگذاری $f: A - \circ \to B$ نشان می‌دهند. اگر رابطه‌ای از A به B در شرط **۱** صدق کند ولی در شرط **۲** صدق نکند، مثلاً هر سه زوج (۱, a)، (۲, a)، (۳, a) متعلق به آن باشند، آن را **تابع چند مقداری** می‌نامند. این نوع توابع با پسوندهای **جزئی** یا **چند مقداری** در علوم ریاضی، به ویژه در علوم نظری کامپیوتر، بسیار مطرح می‌شوند.

توجه کنید که اکثر ریاضی‌دانان، از جمله ما در این کتاب، هر دو شرط **۱** و **۲** را برای تابع قایل می‌شویم و اگر غیر از این باشد، آن را مانند بالا با **پسوند** مشخص می‌کنیم. گونه‌های دیگر **تابع با پسوند** را به مرور خواهیم دید.

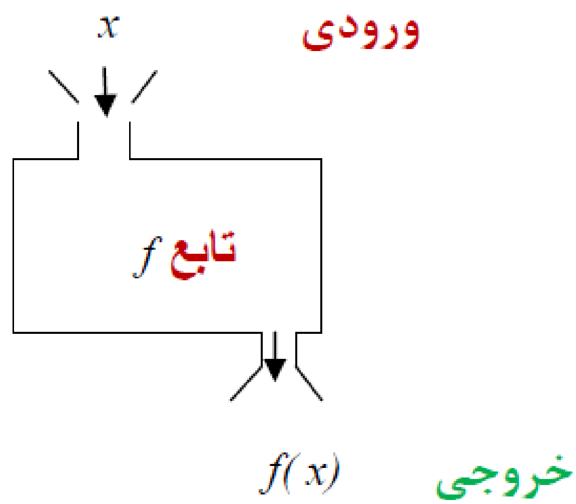
حال چند نماد و واژه را یادآوری می‌کنیم.

۴.۱.۶ تعریف و نماد گذاری

فرض کنیم $f: A \to B$ تابع باشد.

۱- برای هر $x \in A$، عضو منحصر به فرد $y \in B$ را که $(x, y) \in f$، **نگاره‌ی** x (یا **خروجی** حاصل از ورودی x) تحت f، و x را **پیش‌نگاره‌ی** y می‌نامیم. معمولاً y را با $f(x)$ (یا گاهی xf) نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$x \mapsto y \qquad , \quad x \mapsto f(x) \quad , \quad y = f(x)$$



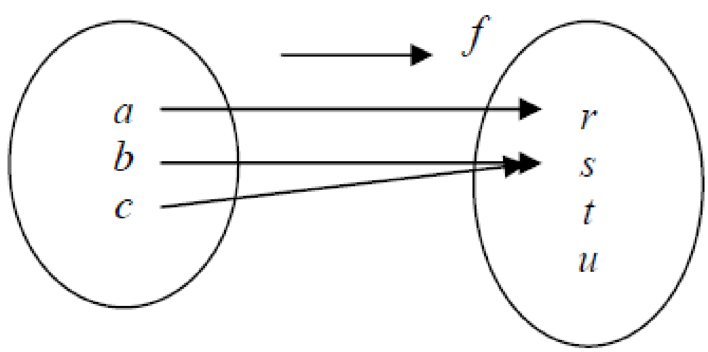
۲- مجموعه‌ی A را **دامنه** یا **ورودی** و B را **همدامنه‌ی** f می‌نامیم و، به ترتیب، با $Domf$ و $Codf$ نشان می‌دهیم.

۳- مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم اعضای f را **نگاره** (**برد**، **تصویر** یا **خروجی**) f می‌نامیم و با نمادهایی چون $f(A)$، $Rng\, f$، $\operatorname{Im} f$ نشان می‌دهیم.

۶.۱.۶ خوش‌تعریفی

از این پس، در این درس و دروس دیگر، بسیاری مواقع لازم است که تابعی چون f از یک مجموعه چون A به مجموعه‌ای چون B تعریف کنیم. توابع را به روش‌های گوناگون می‌توان معرفی، مشخص، یا توصیف کرد. معمولاً توابع را با **فرمول**، **ضابطه**، **دستورالعمل**، **جدول**، یا **نمودار** **ون** معرفی می‌کنیم. برای مثال، جدول و نمودار ون زیر معرف تابعی از $\{a,b,c\}$ به $\{r,s,t,u\}$ است که در آن $f(a)=r$ ، $f(b)=s=f(c)$.

x	a	b	c
$f(x)$	r	s	s



وقتی که تابعی به روشی معرفی شود که درستی شرایط **۱** و **۲** دقیقاً و به طور صریح روشن نباشد، باید **درستی** آن‌ها را **اثبات کنیم**. در این صورت می‌گوییم که

خوش‌تعریفی تابع را بررسی کرده‌ایم.

۷.۱.۶ تساوی توابع

تعریف تساوی دو تابع به همان صورت داده شده برای رابطه‌ها است. با نمادگـذاری **۴.۱.۶** مـی‌گـوییم کـه توابـع $f : A \to B$ و $g : C \to D$ مسـاوی هسـتند **اگـر** $A = C$، $B = D$ و

$$(\forall x \in A) \quad f(x) = g(x)$$