فصل ۶

تابع

آخرین حالت خاص مفهوم رابطه که در این کتاب مطرح می‌کنیم، **تابع** نام دارد. تابع یکی از **اساسی‌ترین** و مهم‌ترین مفاهیم و ابزارها در سراسر ریاضـیات و کاربردهـای آن است. اغراق آمیز نیست اگر بگـوییم کـه تقریبـاً هـر مطلبـی کـه در **علـــوم ریاضـــی** و کاربردهای آن‌ها خواهیم دید به گونه‌ای با این مفهوم سر و کار دارد.

به بیان ساده، **تابع** دستگاهی است کـه بـه هـر ورودی، یـک و دقیقـاً یـک خروجـی منسوب می‌کند. با این مفهوم حتی بیش از دو مفهوم رابطه‌های ترتیبـی و هـم‌ارزی آشــنا هستید. به ویژه توابع بسیاری دیده‌اید که ورودی و خروجی آن‌هـا اعـداد حقیقـی هســتند. پس مطابق معمول این کتاب (درس **مبانی علوم ریاضی**)، به مناسـبت یـادآوری ایـن مفهوم ، دانسته هایمان را عمیق‌تر و

مجرد اندیشیدن را تقویت کنیم!   **مجرد اندیشیدن را تقویت کنیم!**

۱.۶ تابع

در این بخش ابتدا تعریف رسمی تابع را یادآوری و سپس برخی از مفاهیم مـرتبط بـا آن را مطرح می‌کنیم.

۱.۱.۶ تعریف

رابطه‌ی F از A به B، یعنی $F \subseteq A \times B$، را **تابع** می‌نامیم اگر هر عضو A مؤلفه‌ی اول دقیقاً یک عضو F باشد. یعنی،

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B),\ \ (x,y) \in F \qquad (۱)$$

$$(x,y_1),(x,y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2 \qquad (۲)$$

معمولاً، نه لزوماً، حروف کوچک را برای نمادگذاری توابع به کار می‌بریم و اگر رابطه‌ی $f \subseteq A \times B$ تابع باشد، و تنها در این صورت، می‌نویسیم

$$A \xrightarrow{f} B \text{ یا } f : A \to B$$

۲.۱.۶ بحث در کلاس

اگر سؤالی از **قبل** درباره‌ی این تعریف دارید، با همکلاسی‌هایتان به بحث بگذارید. برای مثال گاهی می‌پرسید که

۱- **آیا** می‌توان شرط **۱** یا **۲** را **قایل نشد؟** مثل این است که بپرسیم، آیا می‌توان پشتی برای صندلی قایل نشد؟ البته که می‌شود! برخی آن‌را همان صندلی و برخی دیگر **چهار پایه نه صندلی!** می‌نامند

۲- **آیا** می‌توان **شرط سومی** به تعریف تابع افزود؟ مثل این است که بپرسیم، آیا می توان دسته برای صندلی قایل شد؟ البته که می‌شود! معمولاً آن را **صندلی دسته‌دار** می‌نامند! (**این حالت را بسیار خواهیم دید.**)

۳- فرض کنید $A = \{a,b\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$.

(الف) رابطه‌ی $\{(a\ ,۱),(b\ ,۱)\}$ تابعی (با هر دو شرط **۱** و**۲**) از A به B است. یک مثال دیگر شما بنویسید.

(ب) رابطه‌ی $\{(a\ ,۲)\}$ کدام شرط **۱** یا **۲** تابع را ندارد؟

(پ) رابطه‌ی $\{(a\ ,۱),(b\ ,۲)\ ,(b\ ,۳)\}$ در کدام شرط صدق نمی‌کند؟

(ت) رابطه‌ای از A به B بنویسیدکه در شرط **۱** صدق کند ولی دارای ویژگی **۲** نباشد. رابطه‌ای نیز از A به B بنویسید که در شرط **۱** صدق نکند ولی ویژگی **۲** را داشته باشد.

۳.۱.۶ تذکر

رابطه‌ای را از A به B که در شرط **۱** تابع صدق نکند ولی دارای ویژگی **۲** تابع باشد، **تابع جزئی** می‌نامند و آن‌را با نمادگذاری $f : A -\circ\rightarrow B$ نشان می‌دهند. اگر رابطه‌ای از A به B در شرط **۱** صدق کند ولی در شرط **۲** صدق نکند، مثلاً هر سه زوج $(a\ ,۱)$، $(a\ ,۲)$، $(a\ ,۳)$ متعلق به آن باشند، آن را **تابع چند مقداری** می‌نامند. این نوع توابع با پسوندهای **جزئی** یا **چند مقداری** در علوم ریاضی، به ویژه در علوم نظری کامپیوتر، بسیار مطرح می‌شوند.

توجه کنید که اکثر ریاضی‌دانان، از جمله ما در این کتاب، هر دو شرط **۱** و **۲** را برای تابع قایل می‌شویم و اگر غیر از این باشد، آن را مانند بالا با **پسوند** مشخص می‌کنیم. گونه‌های دیگر **تابع با پسوند** را به مرور خواهیم دید.

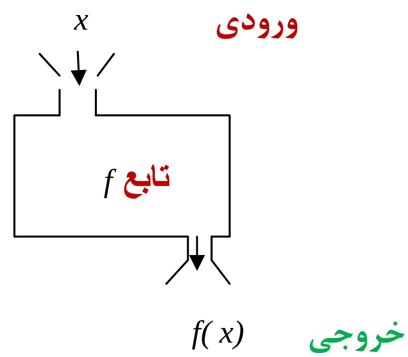
حال چند نماد و واژه را یادآوری می‌کنیم.

۴.۱.۶ تعریف و نماد گذاری

فرض کنیم $f : A \rightarrow B$ تابع باشد.

۱– برای هر $x \in A$، عضو منحصر به فرد $y \in B$ را که $(x,y) \in f$، **نگاره ی** x (یا **خروجی** حاصل از ورودی x) تحت f، و x را **پیش‌نگاره‌ی** y می نامیم. معمولاً y را با $f\left(x\right)$ (یا گاهی xf) نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$x \mapsto y \qquad , \quad x \mapsto f\left(x\right) \quad , \quad y = f\left(x\right)$$



۲- مجموعه‌ی A را **دامنه** یا **ورودی** و B را **همدامنه‌ی** f می‌نامیم و، به ترتیب، با $Domf$ و $Codf$ نشان می‌دهیم.

۳- مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم اعضای f را **نگاره** (**برد**، **تصویر** یا **خروجی**) f می‌نامیم و با نمادهایی چون $f(A)$، $Rng\ f$، $\operatorname{Im} f$ نشان می‌دهیم.

۵.۱.۶ بحث در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را کامل کنید:

$$\operatorname{Im} f = \{y \in B| \quad \cdots \quad \}$$
$$= \{f(x)| \ \cdots \ \}$$

۲- با استفاده از نمادگذاری $y = f(x)$، شرایط **۱** و **۲** تعریف تابع را بازنویسی کنید:

(۱) $(\forall x \in A)...$

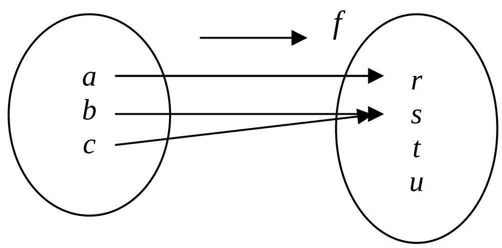
(۲) $x_1 = x_2 \Rightarrow$

۶.۱.۶ خوش‌تعریفی

از این پس، در این درس و دروس دیگر، بسیاری مواقع لازم است که تابعی چون f از یک مجموعه چون A به مجموعه‌ای چون B تعریف کنیم. توابع را به روش‌های

گوناگون می‌توان معرفی، مشخص، یا توصیف کرد. معمولاً توابع را با **فرمول**، **ضابطه**، **دستورالعمل**، **جدول**، یا **نمودار ون** معرفی می‌کنیم. برای مثال، جدول و نمودار ون زیر معرف تابعی از $\{a,b,c\}$ به $\{r,s,t,u\}$ است که در آن $f(a)=r$ ، $f(b)=s=f(c)$.

x	a	b	c
$f(x)$	r	s	s



وقتی که تابعی به روشی معرفی شود که درستی شرایط **۱** و **۲** دقیقاً و به طور صریح روشن نباشد، باید **درستی** آن‌ها را **اثبات کنیم**. در این صورت می‌گوییم که

خوش‌تعریفی تابع را بررسی کرده‌ایم.

۷.۱.۶ تساوی توابع

تعریف تساوی دو تابع به همان صورت داده شده برای رابطه‌ها است. با نمادگذاری **۴.۱.۶** می‌گوییم که توابع $f:A\to B$ و $g:C\to D$ مساوی هستند **اگر** $A=C$، $B=D$ و

$$(\forall x\in A)\qquad f(x)=g(x)$$

۸.۱.۶ بحث در کلاس

فرض کنیم $f,g:A\to B$ تابع باشند. روشن است که اگر $f=g$ ، آنگاه $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$. آیا عکس این گزاره درست است؟

۱- آیا با تعریف بالا، توابع (**حقیقی مقدار**) زیر مساوی هستند؟

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

که در آن $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۰\}$.

۲–اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد، چند **رابطه** از A به B وجود دارد؟ ثابت کنید که **تعداد** (n مرتبه) $m^n = m.m.....m$ **تابع** از A به B وجود دارد؟

۳– نشان دهید که برای هر مجموعه چون B (تهی یا ناتهی) دقیقاً یک تابع از $A=\varnothing$ به B وجود دارد (آن را **تابع تهی**، $\varnothing$، می‌نامیم). اگر $A \neq \varnothing$ و $B=\varnothing$، **چطور؟** اگر $B=\{e\}$ تک عضوی و A دلخواه باشد، **چطور؟**

مفاهیم زیر را نیز به کار خواهید برد.

۹.۱.۶ تعریف

۱– فرض کنیم $f: A \to B$ تابع است و $X \subseteq Y$. در این صورت **تابع تحدید** f بر X، به نمایش $f|_X : X \to B$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\forall x \in X) \quad f|_X(x) = f(x)$$

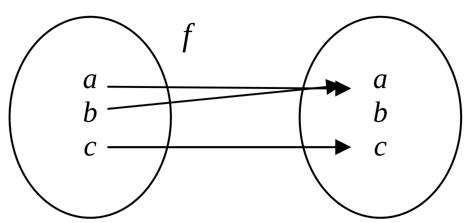
۲– فرض کنیم $f: A \to A$ (یعنی روی A) تابع باشد و $X \subseteq A$. می‌گوییم که X تحت f **ناوردا** یا **بسته** است اگر

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \in X$$

در این صورت $f|_X : X \to X$ تابع است.

۱۰.۱.۶ بحث در کلاس

تابع زیر را در نظر بگیرید.



آیا $X=\{a,b\}$ تحت f بسته است؟ مجموعه‌های $\{c\}$ و $\{a\}$ **چطور؟**

در ادامه چند تابع خاص (**با پسوند**) را معرفی می‌کنیم که بسیار استفاده می‌شوند.

۱۱.۱.۶ تعریف

تابع $f:A\to A$ را **تابع همانی** روی A می‌گوییم اگر

$$(\forall x\in A)\quad f(x)=x$$

این تابع را معمولاً با id_A نشان می‌دهیم. همچنین، تحدید آن را بر $X\subseteq A$، **تابع شمول** X در A می‌نامیم و می‌نویسیم $i_X:X\to A$.

۱۲.۱.۶ تعریف

هر تابع دلخواه $f:\mathbb{N}\to A$ را **دنباله‌ای نامتناهی** در A می‌نامیم.

همچنین، هر تابع $\{۱,۲,\dots,n\}\to A$ را **دنباله‌ای متناهی** در A می نامیم.

توجه می‌کنیم که دنباله‌ی f با خانواده‌ی

$$f(۱),\ f(۲),\ f(۳),\dots$$

از عضوهای A کاملاً مشخص می‌شود. گاهی، برای سادگی، به جای $f(n)$ می‌نویسیم f_n (یا مثلاً a_n) و دنباله‌ی f را با $(f_n)_{n\in N}$ یا $(a_n)_{n\in N}$ نشان می‌دهیم. (تعریف **۱۰.۴.۲** را نیز ببینید.)

۱۳.۱.۶ بحث در کلاس

۱- جدول زیر را، به سلیقه‌ی خودتان، به دنباله‌ای متناهی روی $\{۰,۱\}$ کامل کنید.

n	۱	۲	۳	۴
f_n	۱	۰	۰	؟

۲- فرض کنید دنباله‌ی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ با دستور زیر تعریف شود:

$$f_۱ = ۱ = f_۲ \quad (\forall n \geq ۲) \quad f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}$$

در این صورت، برای مثال، $f_۳ = f_۲ + f_۱ = ۱ + ۱ = ۲$. شش جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. این دنباله را **دنباله‌ی فیبوناچی** می‌نامند. (در اینترنت مطالب بیشتری در باره‌ی این تابع ببینید.)

حال می‌خواهیم تابع خاص دیگری را معرفی کنیم. با همه‌ی سادگی این تابع، اغراق نیست اگر بگوییم که یکی از مفاهیم زیربنایی **مهم** در ریاضیات و کاربردهای آن، به ویژه در علوم کامپیوتر و آمار، است. ابتدا توجه می‌کنیم که هر تابع

$f:A\to\{۰,۱\}$ زیرمجموعه‌ی

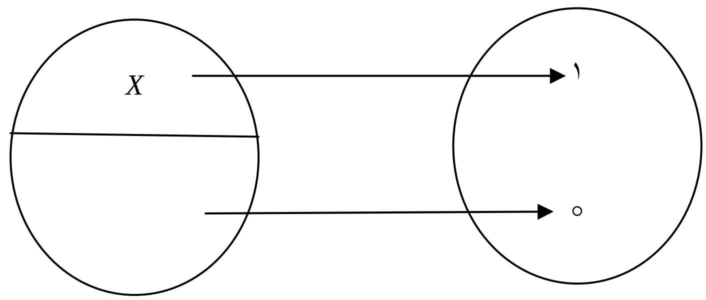
$$X = \bar{f}(۱) = \{x\in A \mid f(x) = ۱\}$$

را از A جدا و مشخص می‌کند. بر عکس، اگر $X\subseteq A$، آنگاه **تعلق** یا **عدم تعلق** x در X را می‌توان به زبان تابعی چون $A\to\{۰,۱\}$ به صورت زیر بیان کرد.

۱۴.۱.۶ تعریف

فرض کنیم $X\subseteq A$. تابع $\chi_X : A\to\{۰,۱\}$ (χ را **خی** یا **کای** بخوانید) با تعریف زیر را **تابع مشخصه‌ی** X در A می‌نامیم:

$$\chi_X(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x\in X, \\ ۰ & \text{اگر } x\notin X. \end{cases}$$



۱۵.۱.۶ تذکر

نکتهای را صرفاً تذکر می‌دهیم و از آن می‌گذریم. در توصیف مفهوم مجموعه گفتیم که اعضای آن باید **مشخص** باشند. از این رو، اگر A مجموعه‌ی دانشجویان کلاس **مبانی علوم ریاضی** باشد، عبارت **همه‌ی دانشجویان دختر این کلاس** زیرمجموعه‌ای چون X را در A مشخص می‌کند، و لذا می‌توانیم تابع $\chi_X : A \to \{۰, ۱\}$ را به‌صورت زیر به آن نسبت دهیم:

$$\chi_X(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \text{ دختر باشد} \\ ۰, & \text{اگر } x \text{ دختر نباشد} \end{cases}$$

ولی عبارتی چون **همه‌ی دانشجویان خوب این کلاس**، **زیرمجموعه**ای از این کلاس را مشخص نمی‌کند. زیرا خوب بودن مشخص نشده است. ولی اگر خوبی را درجه بندی کنیم و مثلاً این یا آن دانشجو با **درجه‌ی۱**، آن چند نفر با **درجه‌ی۹/.** ، برخی با **درجه‌ی۴/.** و . . . ، خوب باشند، آنگاه به جای نسبت دادن تابعی از A به مجموعه‌ی دوعضوی $\{۰, ۱\}$، می‌توانیم تابعی چون $\mu : A \to [۰, ۱]$ از A به بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف کنیم که گویای این مطالب باشد. این توابع معرف مفهومی به نام **زیرمجموعه‌ی فازی** هستند، که مورد بحث ما نیست.

این بخش را با معرفی یک نوع تابع خاص دیگر به پایان می‌بریم.

۱۶.۱.۶ تعریف

هر تابع به صورت زیر را **تابعی با n متغیر** (یا **n ورودی**) می‌نامیم.

$$f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$$

مثال‌های بسیاری از این نوع توابع را دیده‌اید. برای مثال،

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sin x + 2xy$$

تابعی با دو متغیر است.

۱۷.۱.۶ تعریف

هر تابع با دو متغیر چون

$$f : A^2 = A \times A \to A$$

را یک **عمل دوتایی روی** (یا **در**) A می‌نامیم. همچنین، هر تابع

$$f : A^n \to A$$

را یک **عمل n تایی روی** (یا **در**) A می‌نامیم.

۱۸.۱.۶ تذکر

۱– اگر $\lambda : A \times A \to A$ عملی دوتایی روی A باشد، معمولاً (با الگو قرار دادن چهار عمل اصلی اعداد) به جای $\lambda((x, y))$ نماد ساده‌ای چون $x * y$ را به کار می‌بریم.

۲– با توجه به تعریف **۱۷.۱.۶**، هر عمل **صفرتایی** به صورت $\lambda : A^\circ \to A$ است، که در آن $A^\circ = \{\varnothing\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است (بند **۴** بحث در کلاس **۸.۱.۶** را ببینید). روشن است که λ با عضوی چون $\lambda(\varnothing) = a$ کاملاً مشخص می شود. بر عکس، هر عضو دلخواه $x \in A$ عملی صفرتایی چون $\lambda : A^\circ \to A$ را با تعریف $\lambda(\varnothing) = x$ مشخص می‌کند.

تمرین ۱.۶

۱. آیا سؤال های **۳** و **۴** بحث در کلاس **۸.۱.۶** را پاسخ دادید؟

۲. تعداد عمل‌های صفر، یک، و دوتایی روی مجموعه‌های زیر را تعین کنید: $\varnothing$، $\{a\}$، $\{a,b\}$، $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

۳. با استفاده از نماد گذاری بند **۱** تذکر **۱۸.۱.۶**، خوش‌تعریفی عمل‌دوتایی را به عنوان تابع معنی کنید. در واقع، نقطه چین‌ها را کامل کنید:

(۱) بسته بودن: $\forall x,y\in A,\quad x*y\in\cdots$

(۲) $(x=x'\ \&\ y=y')\ \Rightarrow\ x*y=\cdots$

۴. **آیا** عمل تقسیم روی $\mathbb{Z}$ عملی دوتایی (خوش‌تعریف) است؟ روی $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ چطور؟

۵. چند عمل یک تایی $\lambda:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ و دوتایی $\lambda:\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ آشنا روی $\mathcal{P}(A)$ تعریف کنید.

۶. ثابت کنید که عمل‌های جمع و ضرب اعداد کسری روی $\mathbb{Q}$ خوش تعریف هستند. (قدری فنی است! نیاز به کمک استاد درس دارید.)

۷. در دنباله‌ی فیبوناتچی، مقدار $f_۴$ را بیابید.

۸. تابع جزئی $f:\mathbb{R}-0\to\mathbb{R}$ با تعریف $f(x)=۱/x$ را به تابع گسترش دهید.

نگاره‌های مستقیم و معکوس

در اینجا مفاهیم **نگاره** و **پیش‌نگاره‌ی** توابع را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اگر چه این مفاهیم ساده هستند، مبتدیان در عمل قدری با **مشکل** رو به رو می‌شوند!

۱.۲.۶ تعریف

فرض کنیم $f : A \to B$ تابع است. در این صورت،

۱- برای هر $X \subseteq A$، مجموعه‌ی

$$\overrightarrow{f}(X) = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$
$$= \{ f(x) \mid x \in X\}$$

را **نگاره** (یا **خروجی**) **مستقیم** X تحت f می‌نامیم.

۲- برای هر $Y \subseteq B$، مجموعه‌ی

$$\overleftarrow{f}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

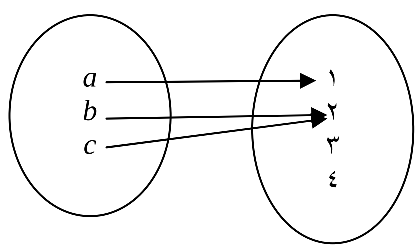
را **نگاره‌ی معکوس** (یا **پیش نگاره‌ی**) Y تحت f می‌نامیم.

۲.۲.۶ بحث در کلاس

اغلب با نگاره‌ی مستقیم کمتر مشکل دارید. **به نگاره‌ی معکوس بیشتر توجه کنید.**

۱- تابع زیر را در نظر بگیرید.

$f:$



روشن است که، برای مثال، $\overrightarrow{f}(\{a\}) = \{f(a)\} = \{۱\}$ و

$$\overrightarrow{f}(\{a,b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{۱,۲\}$$

حال $\overrightarrow{f}(\{b\})$، $\overrightarrow{f}(\{a,c\})$، و $\overrightarrow{f}(\{a,b,c\})$ را بیابید.

۲- **تابع** f بالا را در نظر بگیرید. روشن است که $\overleftarrow{f}(\{۱\}) = \{a\} = \overleftarrow{f}(\{۱,۳\})$ و $\overleftarrow{f}(\{۲\}) = \{b,c\}$. حال مجموعه‌های $\overleftarrow{f}(\{۳\})$، $\overleftarrow{f}(\{۳,۴\})$، $\overleftarrow{f}(\{۲,۳\})$ و

$\overleftarrow{f}(\{۱,۲,۳,۴\})$ را بیابید.

۳- تا اینجا که مشکلی نداشتید، داشتید؟ حال نشان دهید که

$\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(\{۲,۳\}))\neq\{۲,۳\}$ و $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(\{a,b\}))\neq\{a,b\}$.

۳.۲.۶ نمادگذاری

۱- معمولاً $\overrightarrow{f}(X)$ را با $f(X)$ و $\overleftarrow{f}(Y)$ را با $f^{-1}(Y)$ نشان می‌دهند که بهتر است تا مدتی این کار را نکنیم و نماد f^{-1} را برای **وارون** تابع که بعداً معرفی خواهد شد، قایل شویم.

۲- معمولاً برای صرفه‌جویی در نمادگذاری و برای سادگی، اگر $Y=\{y\}$ تک‌عضوی باشد، به جای $\overleftarrow{f}(\{y\})$ می‌نویسیم $\overleftarrow{f}(y)$ که ممکن است اشتباه برانگیز باشد. توجه کنید که $\overleftarrow{f}(\{y\})$ یا $\overleftarrow{f}(y)$ زیرمجموعه‌ی A است نه عضوی از آن. البته ممکن است زیرمجموعه‌ای تک عضوی باشد. مثال‌های بالا را ببینید.

با این مفاهیم در مثال‌های مشخص مشکل چندانی ندارید. برای مثال، بندهای **۱** و **۲** و حتی بند **۳** مثال بالا را به‌راحتی حل کردید. ممکن است در موارد مجرد قدری مشکل داشته باشید که با تمرین به مرور برطرف می‌شود. **به بحث مجرد زیر توجه کنید.**

۴.۲.۶ بحث در کلاس

فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $X\subseteq A$، $Y\subseteq B$. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تحقیق کنید.

۱- $f(a)\in\overrightarrow{f}(X)\Rightarrow[(\exists x\in X),\ f(a)=f(x)]$.

۲- (**لزوماً درست نیست**) $f(a)\in\overrightarrow{f}(X)\Rightarrow a\in X$.

۳- $\overleftarrow{f}(\{y\})=\overleftarrow{f}(y)=\{x\in A\mid f(x)=y\}$.

۴- $a\in\overleftarrow{f}(Y)\Rightarrow[\exists y\in Y,\ \ a=\overleftarrow{f}(y)]$.

۵- $a\in\overleftarrow{f}(Y)\Rightarrow[\exists y\in Y,\ \ a\in\overleftarrow{f}(y)]$.

۶- $a \in \overleftarrow{f}(Y) \Leftrightarrow f(a) \in Y$.

۷- $A = \bigcup_{b \in \operatorname{Im} f} \overleftarrow{f}(b)$.

۸- نشان دهید که مجموعه‌ی $\left\{ \overleftarrow{f}(b) \middle| \ b \in \operatorname{Im} f \right\}$ افراز مجموعه‌ی A است.

۵.۲.۶ تذکر

فرض کنید $f : A \to B$ تابع است. از آنجا که $\overrightarrow{f}$ بر زیرمجموعه‌های A اثر می‌کند و زیرمجموعه‌هایی از B به دست می‌دهد، و $\overleftarrow{f}$ بر زیرمجموعه‌های B اثر می‌کند و زیرمجموعه‌هایی از A به دست می‌دهد، پس در واقع صحبت از توابع زیر است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \xrightarrow{\overrightarrow{f}} \mathcal{P}(B) & , & \mathcal{P}(B) \xrightarrow{\overleftarrow{f}} \mathcal{P}(A) \\ X \mapsto \overrightarrow{f}(X) & & Y \mapsto \overleftarrow{f}(Y) \end{array}$$

این توابع **مهم** **نگاره‌ی مستقیم** و **نگاره‌ی معکوس** ویژگی‌هایی دارند که برخی از آن‌ها را که بیشتر به کار می‌آیند در قضیه‌های زیر می‌آوریم.

۶.۲.۶ قضیه

فرض کنید $f : A \to B$ تابع است. و $C, D \subseteq A$. در این صورت،

۱- *تابع $\overrightarrow{f}$ رابطه‌ی $\subseteq$ را* ***حفظ می‌کند****. یعنی،*

$$C \subseteq D \Rightarrow \overrightarrow{f}(C) \subseteq \overrightarrow{f}(D)$$

۲- *تابع $\overrightarrow{f}$ رابطه‌ی $\cup$ را* ***حفظ می‌کند****. یعنی،*

$$\overrightarrow{f}(C \cup D) = \overrightarrow{f}(C) \cup \overrightarrow{f}(D)$$

۳- *تابع $\overrightarrow{f}$ رابطه‌ی $\cap$ را لزوماً* ***حفظ نمی‌کند****، ولی داریم*

$$\overrightarrow{f}(C \cap D) \subseteq \overrightarrow{f}(C) \cap \overrightarrow{f}(D)$$

۴- *تابع $\overrightarrow{f}$ تفاضل را لزوماً* ***حفظ نمی‌کند****، ولی داریم*

$$\vec{f}(C\setminus D)\supseteq \vec{f}(C)\setminus \vec{f}(D)$$

اثبات این احکام را می‌توانید به‌راحتی اثبات کنید. به‌عنوان نمونه، **۳** را اثبات می‌کنیم و شما نیز حتماً یکی دیگر، برای مثال **۴** را اثبات کنید.

برای اثبات شمول **۳**، فرض می‌کنیم $y\in \vec{f}(C\cap D)$. پس عضوی چون $x\in C\cap D$ وجود دارد به طوری که $y=f(x)$. چون $x\in C\cap D$، داریم $x\in C$ و $x\in D$. پس $y=f(x)\in \vec{f}(C)$ و $y=f(x)\in \vec{f}(D)$، یعنی $y=f(x)\in \vec{f}(C)\cap f(D)$. بنابراین **۳** اثبات شد. البته می‌توانستیم از **۱** نیز استفاده کنیم و اثباتی **فنی**‌تر (!) به صورت زیر ارائه دهیم:

$$\begin{aligned} C\cap D\subseteq C,D &\Rightarrow \vec{f}(C\cap D)\subseteq \vec{f}(C),\vec{f}(D)\\ &\Rightarrow \vec{f}(C\cap D)\subseteq \vec{f}(C)\cap \vec{f}(D)\end{aligned}$$

برای اینکه نشان دهیم تساوی لزوماً در **۳** برقرار نیست، کافی است مثالی از A، B، تابع $f:A\to B$ ، و $C,D\subseteq A$ بیاوریم به طوری که

$$\vec{f}(C)\cap \vec{f}(D)\not\subseteq \vec{f}(C\cap D)$$

ارائه‌ی مثال را به عهده‌ی شما می‌گذاریم. توجه می‌کنیم که، برای اینکه بتوانیم چنین مثالی بیاوریم، ابتدا سعی می‌کنیم نشان دهیم که

$$\vec{f}(C)\cap \vec{f}(D)\subseteq \vec{f}(C\cap D)$$

تا ببینیم در کجا **دچار مشکل می‌شویم**.

$$\begin{aligned} & y\in \vec{f}(C)\cap \vec{f}(D)\Rightarrow y\in \vec{f}(C)\,\&\, y\in \vec{f}(D)\\ &\Rightarrow \left(\exists c\in C, y=f(c)\right)\&\left(\exists d\in D, y=f(d)\right)\\ &\Rightarrow ???\end{aligned}$$

همین جا دچار مشکل می‌شویم! **اگر** $c=d$، آنگاه عضو $x=c=d\in C\cap D$ مشکل را به صورت زیر حل می‌کرد

$$y=f(x)\in f(C\cap D)$$

ولی **لزومی ندارد** که $c=d$. ■

قضیه‌ی زیر ویژگی‌های **تابع نگاره‌ی معکوس** را بیان می‌کند. همان طور که گفتیم، معمولاً مبتدیان در کارکردن با نگاره‌ی معکوس قدری **مشکل دارند**، و آن‌ها که تلاش نمی‌کنند مشکل‌شان را حل کنند، آن‌را تا **سال‌ها** بعد با خود حمل می‌کنند! پس سعی کنید آن را در همین درس، و **همین امروز**، حل کنید. مشکل اصلی از اینجا ناشی می‌شود که در **نگاره‌ی مستقیم**، هر عضو **شکل مشخصی** دارد، یعنی هر عضو $\overrightarrow{f}(X)$ به صورت $f(x)$ است (که در آن $x\in X$). ولی در نگاره‌ی معکوس **چنین نیست** و هر عضو $x\in\overleftarrow{f}(Y)$ با **ویژگی** $f(x)\in Y$ مشخص می‌شود، ولی مبتدیان گاهی می‌نویسند $x=\overleftarrow{f}(y)$ که **نادرست** است. توجه کنید که $\overleftarrow{f}(y)$ **مجموعه** است و نمی‌تواند با **عضو** x برابر باشد. بند **۲** بحث در کلاس **۲.۲.۶** و بحث در کلاس ۴.۲.۶ را یک بار دیگر با دقت مطالعه کنید. در اثبات قضیه‌ی زیر **شرکت کنید!**

۷.۲.۶ قضیه

فرض کنیم $f:A\to B$ تابع است و $C,D\subseteq B$. در این صورت،

۱- *تابع $\overleftarrow{f}$ رابطه‌ی $\subseteq$ را **حفظ می‌کند**.* یعنی،

$$C\subseteq D\Rightarrow\overleftarrow{f}(C)\subseteq\overleftarrow{f}(D)$$

۲- *تابع $\overleftarrow{f}$ اجتماع را **حفظ می‌کند**.* یعنی،

$$\overleftarrow{f}(C\cup D)=\overleftarrow{f}(C)\cup\overleftarrow{f}(D)$$

۳- (بر خلاف $\overrightarrow{f}$) *تابع $\overleftarrow{f}$ اشتراک را نیز **حفظ می‌کند**.* یعنی،

$$\overleftarrow{f}(C \cap D)=\overleftarrow{f}(C) \cap \overleftarrow{f}(D)$$

۴- (برخلاف $\overrightarrow{f}$) تابع $\overleftarrow{f}$ *تفاضل را نیز* **حفظ می‌کند**. یعنی،

$$\overleftarrow{f}(C \setminus D)=\overleftarrow{f}(C) \setminus \overleftarrow{f}(D)$$

اثبات

برای درک بهتر اثبات‌ها، دلیل هر مرحله را با **صدای بلند** (!) بیان کنید.

۱-

$$\begin{aligned} x \in \overleftarrow{f}(C) &\Rightarrow f(x) \in C && (???) \\ &\Rightarrow f(x) \in D && (???) \\ &\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(D) && (???) \end{aligned}$$

راحت بود؟! بند **۲** را شما بعد از کلاس اثبات کنید .

۳- ابتدا ثابت می‌کنیم که مجموعه‌ی سمت چپ **۳** زیرمجموعه‌ی سمت راست آن اسـت. دلیل هر مرحله را با **صدای بلند** (!) بیان کنید.

$$\begin{aligned} x \in \overleftarrow{f}(C \cap D) &\Rightarrow f(x) \in C \cap D \\ &\Rightarrow f(x) \in C \quad \& \quad f(x) \in D \\ &\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(C) \quad \& \quad x \in \overleftarrow{f}(D) \\ &\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(C) \cap \overleftarrow{f}(D) \end{aligned}$$

البته می‌توانستیم از **۱** نیز استفاده کنیم و اثباتی **فنی**‌تر (!) ارائه دهیم. **در آن صورت لذت انجام دادن آن را از شما می‌گرفتیم!!**

حال نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی سمت راست **۳** زیرمجموعه‌ی سمت چپ آن است.

$$\begin{aligned} x\in \overleftarrow{f}(C)\cap \overleftarrow{f}(D) &\Rightarrow x\in \overleftarrow{f}(C) \;\;\&\;\; x\in \overleftarrow{f}(D)\\ &\Rightarrow f(x)\in C \;\;\&\;\; f(x)\in D\\ &\Rightarrow f(x)\in C\cap D\\ &\Rightarrow x\in \overleftarrow{f}(C\cap D) \end{aligned}$$

مشکلی که در بند **۳** قضیه‌ی مربوط به $\overrightarrow{f}$ داشتیم **پیش نیامد!** ■

۸.۲.۶ بحث در کلاس

فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $X\subseteq A$، $Y\subseteq B$. احکام زیر را اثبات کنید (بند **۳** بحث در کلاس **۲.۲.۶** را ببینید).

۱- $\overrightarrow{f}\left(\overleftarrow{f}(Y)\right)\subseteq Y$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

۲- $X\subseteq \overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(X)\right)$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

یک ویژگی بسیار مهم دیگر تابع‌های **نگاره‌ی مستقیم** و **نگاره‌ی معکوس** را در بخش بعدی می‌آوریم.

تمرین ۲.۶

۱. نادرست بودن بند **۲** بحث در کلاس **۴.۲.۶** را با مثال نشان دهید.

۲. نادرستی بند **۴** و درستی بندهای **۵** و **۶** را در بحث در کلاس **۴.۲.۶** توضیح دهید.

۳. **آیا** سؤال‌های **مهم** **۷** و **۸** بحث در کلاس **۴.۲.۶** را حل کردید؟

۴. فرض کنید $X\subseteq A$ و $f:A\to B$ تابع و $g=f|_X$ تحدید f بر X باشد. نشان دهید که برای هر $Y\subseteq B$، $\overleftarrow{g}(Y)=X\cap\overleftarrow{f}(Y)$.

۵. فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $Y\subseteq B$. ثابت کنید که

$$\overleftarrow{f}(B\setminus Y)=A\setminus\overleftarrow{f}(Y)$$

۶. فرض کنید $f:A\to B$ تابع است و $X\subseteq A$، $Y\subseteq B$. ثابت کنید که

(الف) $f(X\cap\overleftarrow{f}(Y))=f(X)\cap Y$.

(ب) $f(\overleftarrow{f}(Y))=f(A)\cap Y$.

۷. فرض کنید $f:S\to T$ تابع است و $A,B\subseteq S$، $D,E\subseteq T$. درستی یا نادرستی حکم‌های زیر را نشان دهید:

(الف) اگر $A\subset B$ زیر مجموعه‌ی سره باشد، آنگاه $f(A)\subset f(B)$ زیرمجموعه‌ی سره است.

(ب) اگر $D\subset E$ آنگاه $\overleftarrow{f}(D)\subset\overleftarrow{f}(E)$.

(پ) اگر $D\cap E=\varnothing$ آنگاه $\overleftarrow{f}(D)\cap\overleftarrow{f}(B)=\varnothing$.

۸. آیا سؤال‌های بحث **۸.۲.۶** را به طور کامل پاسخ دادید؟

۹. (**مهم است**) فرض کنید که $f:X\to Y$ تابع و $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X و $\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشد. نشان دهید که

(الف) $f(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

(ب) $f(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

(پ) $\overleftarrow{f}(\bigcup_{\beta\in J}B_\alpha)=\bigcup_{\beta\in J}\overleftarrow{f}(B_\alpha)$.

(ت) $\overleftarrow{f}(\bigcap_{\beta\in J}B_\beta)=\bigcap_{\beta\in J}\overleftarrow{f}(B_\beta)$.

۱۰. فرض کنید $f:A\to B$ و $g:C\to D$ تابع هستند. درستی یا نادرستی حکم-های زیر را اثبات کنید.

(الف) رابطه‌ی $f\cup g$ تابعی از $A\cup C$ به $B\cup D$ است.

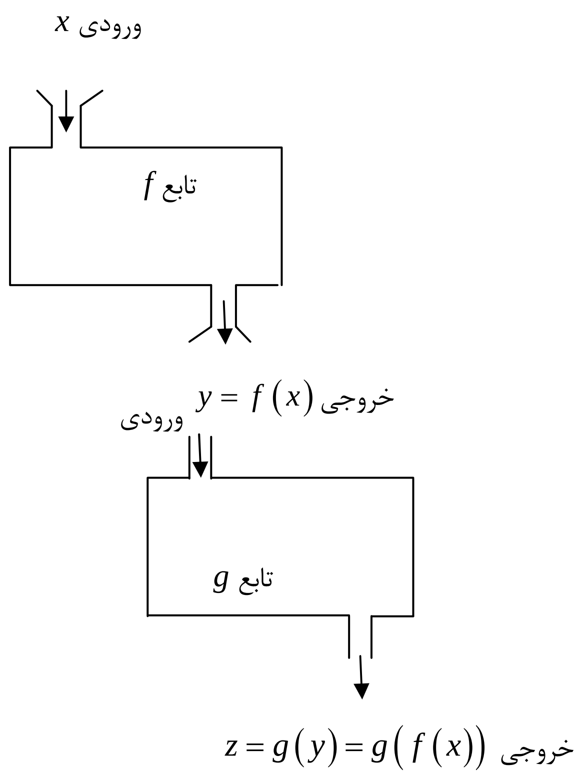
(ب) رابطه‌ی $f\cap g$ تابعی از $A\cap C$ به $B\cap D$ است.

۱۱. (**مهم است**) فرض کنید که $f:A\to B$ تابع است. نشان دهید که رابطه‌ی K_f با تعریف زیر رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است و افراز A/K_f را مشخص کنید :

$$xK_f y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

۳.۶ ترکیب توابع

بسیاری مواقع لازم است که تابع g روی خروجی های تابع f اثر کند:



این مفهوم با واژه و نمادگذاری خاص خود به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱.۳.۶ تعریف

فرض کنیم $f : A \to B$ و $g : B \to C$ تابع هستند. **ترکیب** f با g تابعی چون $h : A \to C$ است به طوری که

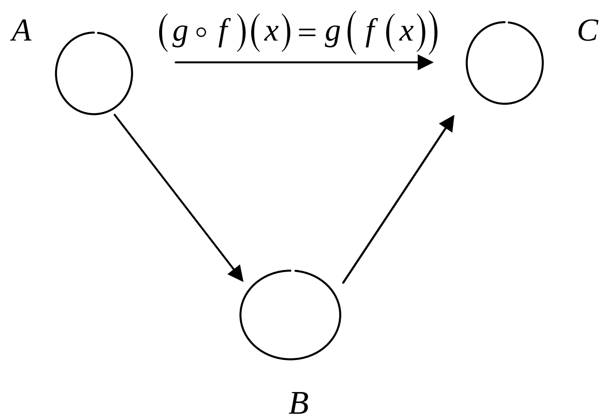
$$(\forall x \in A) \quad h(x) = g(f(x))$$

معمولاً h را با نماد $g \circ f$ نشان می‌دهیم.

با توجه به این تعریف، تابع f را وقتی می‌توانیم با g ترکیب کنیم که $Codf = Domg$. البته ممکن است نظر شما، مانند نظر برخی دیگر، این باشد که شمول $\operatorname{Im} f \subseteq Domg$ کافی است. نظر نادرستی نیست، ولی به دلایل فنی دیگری که به مرور مطرح می‌شوند، مورد نظر ما نیست. ترکیب توابع را می‌توان با نموداری به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

چنین نموداری را نمودار **تعویض‌پذیر** یا **جا به جایی** می‌نامیم، به این معنی که مسیر از A به C با تابع مرکب $g \circ f$ همان مسیر دو مرحله‌ای از A به B با تابع f و سپس از B به C با تابع g است. به نمودار زیر توجه کنید:



در بقیه‌ی این بخش به برخی از ویژگی‌ها و کاربردهای عمل ترکیب توابع می‌پردازیم که هر یک از آن‌ها در **علوم ریاضی** و کاربردهای آن‌ها به کار می‌روند. اثبات اغلب آن‌ها آسان و **سرراست** هستند، که **به کمک یکدیگر** انجام می‌دهیم. ابتدا در بحث زیر شرکت کنید.

۲.۳.۶ بحث در کلاس

۱- فرض کنید که $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دستور دو ضابطه‌ای زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x-۳, & \text{اگر } x<۰ \\ ۲x, & \text{اگر } x\geq ۰ \end{cases}$$

روشن است که

$$(f\circ f)(۵)=f\big(f(۵)\big)=f\left(۵^{۲}\right)=f(۲۵)=۲۵^{۲}=۶۲۵$$

$$(g\circ g)(-۲)=g\big(g(-۲)\big)=g(-۲-۳)=g(-۵)=-۸$$

$$(f\circ g)(۲)=f\big(g(۲)\big)=f(۲\times ۲)=f(۴)=۴^{۲}=۱۶$$

$$(g\circ f)(۲)=g\big(f(۲)\big)=g\left(۲^{۲}\right)=g(۴)=۲\times ۴=۸$$

توابع مرکب $f\circ f$ ، $g\circ g$ ، $g\circ f$ ، $f\circ g$ را مشخص کنید. **آیا** $f\circ g=g\circ f$ ؟

۲- فرض کنید $f:A\to B$ ، در این صورت $f\circ id_A=f$ ، زیرا برای هر $a\in A$، داریم

$$\left(f\circ id_A\right)(a)=f\left(id_A(a)\right)=f(a)$$

نشان دهید که $id_B\circ f=f$.

۳- نمودار تعویض‌پذیری $f\circ id_A=f$ به صورت زیر است:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id_A"'] & & B \\ & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

نمودار تعویض‌پذیری $id_B\circ f=f$ را رسم کنید.

۴– فرض کنید که $A \xrightarrow{f} B$ ، $B \xrightarrow{g} C$ ، $C \xrightarrow{h} D$ تابع باشند. **نشان دهید** که عمل ترکیب توابع **شرکت‌پذیر** است . یعنی،

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

۳.۳.۶ تعریف

همراه با هر حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ دو تابع طبیعی p و q به صورت زیر وجود دارند

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{q} & A \times B & \xrightarrow{p} & A \\ b & \leftarrow\!\shortmid & (a,b) & \mapsto & a \end{array}$$

که آن‌ها را، با توجیه واضح، **توابع تصویر** بر A و بر B می‌نامیم.

حاصل‌ضرب دکارتی همراه با این توابع تصویر دارای ویژگی **مهم** زیر هستند، که آن را **ویژگی جهانی ضرب** می‌نامیم.

۴.۳.۶ قضیه (ویژگی جهانی ضرب)

برای هر دو تابع دلخواه $A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} B$، *تابع منحصر به فرد* $h : X \to A \times B$ *وجود دارد به‌طوری که هر دو مثلث زیر تعویض‌پذیر هستند.* یعنی، $p \circ h = f$ ، $q \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, dashed, "h"] & \\ B & A \times B \arrow[l, "q"] \arrow[r, "p"'] & A \end{tikzcd}$$

اثبات

از این پس، در سراسر دروس **علوم ریاضی** و کاربردهای آن‌ها، لازم می‌شود توابعی با **ویژگی**‌هایی خاص تعریف کنیم، که این قضیه نمونه‌ای از آن است. اثبات را با توضیح بیشتری می‌آوریم که **روش مهم آن را بیاموزید**. در ضمن در نمودارها، تابع‌های با پیکان‌های خط پر، تابع‌هایی **داده شده** هستند و توابع با پیکان‌های نقطه چین را **باید بیابیم**.

تابع مورد درخواست $h: X \to A \times B$ را **چطور** تعریف کنیم؟ باید به هر $x \in X$ یک جفت مرتب چون $h(x) = (?,?)$ نظیر کنیم که مؤلفه‌ی اول آن در . . . و مؤلفه‌ی دوم آن در . . . باشد. داده‌هایمان چه هستند؟ **درست است**، دو تابع $f: X \to A$ و $g: X \to B$ داده شده‌اند. پس متناظر با هر $x \in X$، عضوهای $f(x) \in A$ و $g(x) \in B$ را داده‌ایم. از این رو طبیعی است که $h(x)$ را جفت مرتب $\left(f(x), g(x)\right)$ درنظر بگیریم:

$$\begin{aligned} &X \xrightarrow{h} A \times B \\ &x \mapsto \left(f(x), g(x)\right) \end{aligned}$$

حال باید بررسی کنیم که تابع ساخته شده‌ی f دارای ویژگی‌های مورد نظر قضیه است.

اثبات سرراست است. برای هر $x \in X$، داریم.

$$\begin{aligned} (p \circ h)(x) &= p\left(h(x)\right) && \text{(تعریف ترکیب توابع)} \\ &= p\left(f(x), g(x)\right) && \text{(تعریف } h(x)\text{)} \\ &= f(x) && \text{(تعریف } p\text{)} \end{aligned}$$

پس $p \circ h = f$. به‌همین صورت، **نشان دهید** که $q \circ h = g$.

تاکنون وجود تابع f با ویژگی‌های خواسته شده اثبات شد. حال، **قبل از اینکه فراموش کنیم**، **باید یکتایی** چنین تابعی را اثبات کنیم. مطابق آنچه که قبلاً نیز گفتیم، فرض می‌کنیم که هر دو تابع $h, h': X \to A \times B$ دارای ویژگی‌های مذکور در قضیه باشند. یعنی، ($q \circ h = g$ ، $p \circ h = f$) و ($q \circ h' = g$ ، $p \circ h' = f$). باید

نشان دهیم که $h=h'$، یعنی برای هر $x\in X$، $g(x)=h(x)$. توجه می‌کنیم که $h(x)$ و $h'(x)$ در $A\times B$ هستند و دو عضو $A\times B$ وقتی با هم مساوی‌اند که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظر مساوی باشند.

روشن است که $p(h(x))$ مؤلفه‌ی اول $h(x)$ و $p(h'(x))$ مؤلفه‌ی اول $h'(x)$است. ولی بنابر $p\circ h=f$، مؤلفه‌ی اول $h(x)$ برابر با $f(x)$ است و بنابر $p\circ h'=f$، مؤلفه‌ی اول $h(x)$ نیز برابر با همان $f(x)$ است. با استدلالی مشابه، نشان دهید که مؤلفه‌های دوم $h(x)$ و $h'(x)$ برابرند. به این صورت، قضیه به طور کامل اثبات می‌شود!■

اثبات‌هایی این چنین را در سراسر **علوم ریاضی** خواهید دید. ساده و سرراست **هستند**، ولی

باید با تمرین کردن بیاموزید که به تنهایی قادر به ارائه‌ی چنین اثبات‌هایی بشوید. از ما گفتن!

۵.۳.۶ بحث در کلاس

نمودار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "g"'] & A\times B \arrow[l, "p_B"'] \arrow[r, "p_A"] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\
D & C\times D \arrow[l, "p_D"'] \arrow[r, "p_C"] & C
\end{tikzcd}$$

که در آن p ها توابع تصویر هستند. با استفاده از صورت قضیه‌ی قبل، استدلال کنید که تابعی منحصر به فرد چون $h:A\times B\to C\times D$ وجود دارد که مربع‌های حاصل را جا به جایی می‌سازد. اگر موفق نشدید، نمودار بالا را به صورت مثلثی زیر رسم کنید، **حتماً موفق می شوید.**

$$\begin{tikzcd}
& A\times B \arrow[dl, "g\circ p_B"'] \arrow[dr, "f\circ p_A"] & \\
D & & C \\
& C\times D \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

حال با الگو قرار دادن تعریف h در اثبات قضیه‌ی قبل، می‌توانید تابع h در این نمودار را به صورت زیر تعریف کنید:

$$A\times B \xrightarrow{h} C\times D$$
$$(a,b)\to\left(f(a),g(b)\right)$$

با توجه به تعریف تابع h، معمولاً می‌نویسیم $h=(f,g)$، یا گاهی $h=f\times g$.

حال همتای این مطالب را برای **اجتماع مجزا** (که در تعریف **۱۲.۴.۲** دیدیم) به‌جای حاصل‌ضرب مورد بررسی قرار می‌دهیم . برای راحتی کار در نوشتن، فرض می‌کنیم $A\cup B$ اجتماع دو مجموعه‌ی **مجزا** است، یعنی $A\cap B=\varnothing$ (در غیر این صورت باید اجتماع مجزای $A\dot{\cup}B=(A\times\{۱\})\cup(B\times\{۲\})$ را در نظر بگیریم، که نوشته‌هایمان را قدری پیچیده می‌کند.)

۶.۳.۶ تعریف

همراه با هر اجتماع (مجزا) $A\cup B$ دو **تابع طبیعی شمولی** i_A، i_Bبه صورت زیر وجود دارند

$$B\xrightarrow{i_B}A\cup B\xleftarrow{i_A}A$$
$$b\mapsto b \qquad\qquad a\leftarrow\!\shortmid a$$

این **توابع شمولی طبیعی** دارای ویژگی **مهم** زیر هستند که آن‌را **ویژگی جهانی همضرب** می‌نامیم.

۷.۳.۶ قضیه (ویژگی جهانی همضرب)

برای هر دو تابع دلخواه $A \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} B$، تابع منحصر به فرد $h : A \cup B \to X$ وجود دارد به طوری که مثلث‌های زیر تعویض‌پذیرند.

یعنی، $h \circ i_A = f$، $h \circ i_B = g$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_B"] \arrow[dr, "g"'] & A \cup B \arrow[d, "h"] & A \arrow[l, "i_A"'] \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

اثبات

قبل از راهنمایی برای اثبات **وجود** و **یکتایی** h ، توجه کنید که تفاوت این نمودار با نمودار قضیه‌ی **۳.۳.۶** در این است که همه‌ی پیکان‌ها **برعکس** شده‌اند. یعنی این دو قضیه **دوگان** یکدیگرند.

تصور نمی‌کنیم که برای تعریف تابع $h : A \cup B \to X$، مورد نظر در قضیه، نیاز به کمک داشته باشید! چون $f : A \to X$ و $g : B \to X$ را **دارید**، به‌راحتی می‌توانید تابع h را از **اجتماع** (**مجزا**) $A \cup B$ به X به صورت دو ضابطه‌ای زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \dots, & x \in A \text{ اگر} \\ \dots, & x \in B \text{ اگر} \end{cases}$$

توجه کنید که چون $A \cap B = \varnothing$، پس h خوش‌تعریف است، در غیر این صورت ممکن بود برای x ای در $A \cap B$، $f(x) \neq g(x)$ و در نتیجه دو مقدار برای $h(x)$

به دست می‌آمد که **متناقض** با تعریف تابع است. بقیه‌ی کـار اثبـات قضـیه را بـه عنـوان تمرین در منزل انجام دهید. از این پس با **اثبات‌های پر پیچ و خـم** ایـن چنـین در این درس و درس‌های دیگر ریاضی زیاد مواجه می‌شـویم. ایـن قضـیه در درس‌هـای آنـالیز ریاضی به **لم چسب** نیز معروف است (دلیل آن با توجه به تعریف h روشن است! نیست؟

■

بیاموزید و اندیشه ورزی کنید. **بیاموزید و اندیشه ورزی کنید.**

۸.۳.۶ بحث در کلاس

همتای بحث **۵.۳.۶** را برای اجتماع (مجزا) بنویسید و آن‌را به بحث بگذارید.

یک ویژگی بسیار مهم دیگر تابع های **نگاره‌ی مستقیم** و **نگاره‌ی معکوس**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A)\xrightarrow{\vec{f}}\mathcal{P}(B) & , & \mathcal{P}(B)\xrightarrow{\overleftarrow{f}}\mathcal{P}(A) \\ X\mapsto \vec{f}(X) & & Y\mapsto \overleftarrow{f}(Y) \end{array}$$

را کـه در بخـش قبـل قـول دادیـم، در قضـیه‌ی زیـر مـی‌آوریـم و اثبـات سرراسـت آن را به عهده‌ی **شما بهترین‌ها** می‌گذاریم.

۹.۳.۶ قضیه

فرض کنیم $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ *تابع باشند. در این صورت،*

۱- $\overrightarrow{g\circ f}=\vec{g}\circ\vec{f}$

۲- $\overleftarrow{g\circ f}=\overleftarrow{f}\circ\overleftarrow{g}$. *(به تغییر ترتیب توجه کنید.)*

به زبان نموداری، داریم:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "g\circ f"] & & & \mathcal{P}(A) \arrow[dl, "\vec{f}"'] \arrow[dd, "\overrightarrow{g\circ f}"] \\
B \arrow[dr, "g"'] & & \Rightarrow & \mathcal{P}(B) \arrow[dr, "\vec{g}"'] & \\
 & C & & & \mathcal{P}(C)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "g\circ f"] & & & \mathcal{P}(A) \\
B \arrow[dr, "g"'] & & \Rightarrow & \mathcal{P}(B) \arrow[ur, "\overleftarrow{f}"] & \\
 & C & & & \mathcal{P}(C) \arrow[ul, "\overleftarrow{g}"] \arrow[uu, "\overleftarrow{g\circ f}"']
\end{tikzcd}
$$

تمرین ۳.۶

۱. فرض کنید که دو تابع حقیقی $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $g(x)=\cot x$ و $f(x)=۲x^۳+۱$ تعریف شده اند. تابع های مرکب $f\circ g$ و $g\circ f$ را مشخص کنید.

۲. دو تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ با ضابطه‌های $f(x)=\ln x$ و $g(x)=e^x$ تعریف شده اند. تابع های مرکب $f\circ g$ و $g\circ f$ را مشخص کنید.

۳. آیا شرکت‌پذیری مورد سؤال بند ۴ بحث ۲.۳.۶ را اثبات کردید؟

۴. آیا توانستید به سؤال **مهم** ولی ساده‌ی بحث **۵.۳.۶** پاسخ دهید؟ سؤال بحث **۸.۳.۶** را فراموش نکنید.

۵. فرض کنید تابع $f:A\to A$ چنان باشد که برای هر $a\in A$، $f(f(a))=a$. ثابت کنید که f به عنوان رابطه‌ای روی A متقارن است.

۶. (مهم) برای هر عدد صحیح a، تابع $\mu_a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را با $\mu_a(x)=xa$ تعریف کنید. نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح a و b داریم $\mu_{ab}=\mu_a\circ\mu_b$.

۷. (مهم) برای هر عدد صحیح a، تابع $\lambda_a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را با $\lambda_a(x)=x+a$ تعریف کنید. نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح a و b داریم $\lambda_{a+b}=\lambda_a\circ\lambda_b$.

۸. قضیه‌ی **۹.۳.۶** را اثبات کنید (تمرین خوبی است).