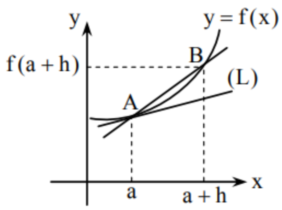
به نام خداوند جان و خرد

مشتق

۴-۱: مفاهیم اولیه‌ی مشتق



در شکل مقابل در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع $y=f(x)$، خط L را بر نمودار مماس کرده‌ایم. نقطه‌ی B را نیز با مختصات $(a+h,f(a+h))$ روی نمودار در نظر گرفته‌ایم (در شکل، $h>0$، و اگر $h<0$، آن‌گاه B سمت چپ A قرار می‌گیرد). شیب پاره‌خط AB برابر است با: $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$، و واضح است وقتی که $h\to 0$، با نزدیک شدن نقطه‌ی B به نقطه‌ی A، خط AB نیز به خط L نزدیک می‌شود. بنابراین حد کسر بالا همان شیب خط L خواهد شد. به حد کسر فوق، که برابر شیب خط مماس است، مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=a$ می‌گویند.

تعریف: فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. اگر حد زیر وجود داشته باشد، می‌گوییم f در $x=a$ مشتق‌پذیر است و مقدار حد را «مشتق تابع f در $x=a$» می‌نامیم.

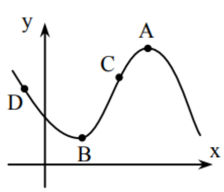
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ **تذکر (۱):** اگر قرار دهید $x=a+h$، وقتی $h\to 0$، داریم: $x\to a$ و می‌توانیم حد بالا را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

➢ **تذکر (۲):** شیب خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ برابر $f'(a)$ است. در حالتی که $f'(a)=\infty$، با وجود آن‌که $f'(a)$ وجود ندارد (زیرا عددی حقیقی نیست)، خط مماس وجود دارد و خطی عمودی (موازی محور yها) است.

در کدام نقطه واقع بر منحنی روبه‌رو، مقدار مشتق بیش‌تر است؟
(منحنی مربوط به یک تابع مشتق‌پذیر در R است.)



حل: در نقاط A و B خط مماس بر منحنی تقریباً افقی و مقدار مشتق برابر صفر است. در نقطه‌ی D، شیب خط مماس عددی منفی و در نقطه‌ی C، شیب خط مماس عددی مثبت است. پس در نقطه‌ی C، مقدار مشتق تابع بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مشتق‌های یک‌طرفه:

برای وجود داشتن حد در یک نقطه، باید حدهای چپ و راست در آن نقطه موجود و برابر باشند. به این ترتیب می‌توانیم مشتق‌های چپ و راست را تعریف کنیم:

تعریف مشتق چپ و راست:

اگر تابع f در بازه‌ی $[b,a]$ تعریف شده باشد، مقدار حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق چپ تابع f در $x=a$ می‌نامیم:

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\qquad \text{یا}\qquad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به‌همین ترتیب برای تابع f که در بازه‌ی $[a,c)$ معین است، مشتق راست f در $x=a$ تعریف می‌شود:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\qquad \text{یا}\qquad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نتیجه: تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند.

با استفاده از تعریف مشتق، می‌توانیم مشتق توابع مختلف را به‌دست آوریم، ولی در بسیاری از موارد، این کار طولانی و طاقت‌فرسا است. به‌همین دلیل فرمول‌هایی برای مشتق‌گیری توابع وجود دارد که کمی جلوتر به آن‌ها اشاره خواهیم کرد. البته در مسائلی خاص استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری ساده‌تر است که چند نمونه از آن‌ها را مشاهده می‌کنید:

اختلاف بین مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ **در نقطه‌ی** $x=0$ **کدام است؟**

حل: اولاً چون $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ صفر $\times$ کران‌دار $=0$ و $f(0)=0$، تابع f در 0 در $x=0$ پیوسته است. حال داریم:

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\lim_{t\to +\infty}\tan^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}$$

به‌همین ترتیب $f'_{-}(0)=-\frac{\pi}{2}$ و اختلاف دو مشتق $\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$ می‌شود.

❍ **مسأله‌ی (۱): الف) اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}$ را بیابید (m,n,k اعداد حقیقی ثابت هستند).**

ب) اگر $f'_{+}(a)$ و $f'_{-}(a)$ موجود باشند، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$ را بیابید.

حل: الف) با اضافه و کم کردن $f(a)$ در صورت کسر داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{kh}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{kh}$$

حال مثلاً کسر اول را به‌صورت زیر می‌توانیم برحسب $f'(a)$ بیان کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{kh}=\frac{m}{k}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{mh}\xrightarrow{t=mh}\frac{m}{k}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=\frac{m}{k}f'(a)$$

به‌همین ترتیب کسر دوم برابر $\frac{n}{k}f'(a)$ می‌شود و جواب نهایی برابر است با: $\frac{(m-n)f'(a)}{k}$.

ب) اگر قرار دهیم $t=2h$ و $k=-3h$، آن‌گاه داریم: $t\to 0^{+}$ و $k\to 0^{-}$ (وقتی $h\to 0^{+}$)، و می‌توانیم کسر را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}$$

$$=2\lim_{t\to 0^{+}}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}+3\lim_{k\to 0^{-}}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=2f'_{+}(a)+3f'_{-}(a)$$

نتیجه‌ی قسمت (الف) نکته‌ی مفیدی است که گاه در حل مفید واقع می‌شود:

نکته: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، و m، n و k سه عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

مسأله‌ی (۲): اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & x\ge 1 \\ x^2-3x+6 & x<1 \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h^2)-f(1-2h^2)}{3h^2}$ را به‌دست آورید.

حل: با اضافه و کم کردن $f(1)$ در صورت کسر می‌توانیم حاصل کسر را برحسب مشتق‌های چپ و راست f بنویسیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{3h^2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{3h^2}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}+\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{-2h^2}$$

اگر قرار دهیم $t=h^2$ و $k=-2h^2$، وقتی $h\to 0$ داریم: $t\to 0^+$ و $k\to 0^-$ و حاصل حد اول $f'_+(1)$ و حاصل حد دوم $f'_-(1)$ می‌شود.

بنابراین جواب نهایی برابر $\frac{1}{3}f'_+(1)+\frac{2}{3}f'_-(1)$ می‌شود. برای محاسبه‌ی مشتق‌ها با توجه به پیوستگی تابع f در $x=1$ می‌توانیم از دو ضابطه مشتق بگیریم، که از فرمول‌های مشتق‌گیری می‌دانیم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & x>1 \\ 2x-3 & x<1 \end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=5\ ,\ f'_-(1)=-1\Rightarrow \text{جواب}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$$

مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری:

دیدیم که تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد. حال می‌خواهیم کمی دقیق‌تر نقاطی را بررسی کنیم که در آن‌ها این حد وجود ندارد، یا به عبارت دیگر نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع را. ابتدا به قضیه‌ی زیر دقت کنید.

قضیه: **اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در $x=a$ پیوسته است.**
به عبارت دیگر: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ نیز مشتق‌پذیر نیست.

➢ **تذکر:** دقت کنید که عکس قضیه‌ی بالا درست نیست. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست (زیرا $f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$).

نتیجه: از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که برای پیدا کردن نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع باید:

۱- نقاط ناپیوستگی را پیدا کنیم. همه‌ی این نقاط، نقاط مشتق‌ناپذیری هم هستند.

۲- نقاطی که در آن‌ها تابع پیوسته است، ولی یکی از مقادیر $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ موجود نباشند، نقاط مشتق‌ناپذیری‌اند. همین‌طور نقاطی که در آن‌ها $f'_+(a)\neq f'_-(a)$.

مسأله‌ی (۳): در توابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ x^3+1 & x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ x^3 & x<0 \end{cases}$، **مقادیر مشتق چپ و راست را در $x=0$ به‌دست آورید.**

حل: در هر دو تابع بدون در نظر گرفتن نقطه‌ی $x=0$ می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ 3x^2 & x<0 \end{cases}\quad ,\quad g'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ 3x^2 & x<0 \end{cases}$$

دقت کنید که در ضابطه‌ی مشتق، شرط $x\ge 0$ در ضابطه‌ی اول توابع، به $x>0$ تغییر پیدا کرده است. ولی در نقطه‌ی مرزی $x=0$ چه وضعیتی برقرار است؟ در تابع f داریم:

$$f(0)=1\Rightarrow f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=0$$

به همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3}{x}=0$، در نتیجه: $f'_+(0)=f'_-(0)=0$، یا به بیان دیگر $f'(0)=0$.

در تابع g نیز با توجه به $g(0)=1$، برای محاسبه‌ی $g'_+(0)$ از همان روابط $f'_+(0)$ استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم: $g'_+(0)=0$، ولی برای $g'_-(0)$ داریم:

$$g'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

پس $g'_-(0)$ وجود ندارد!

در مسأله‌ی (۳) اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که برای محاسبه‌ی $f'_+(\circ)$ و $f'_-(\circ)$ می‌توانستیم از همان دو ضابطه‌ی $f'(x)$ استفاده کنیم (از حدهای $\lim\limits_{x\to\circ^+} ۲x$ و $\lim\limits_{x\to\circ^-} ۳x^۲$). ولی در محاسبه‌ی $g'_-(\circ)$ نمی‌توانیم از $\lim\limits_{x\to\circ^-} ۳x^۲$ (در ضابطه‌ی دوم $g'(x)$) استفاده کنیم. دقت در صورت سؤال نشان می‌دهد که f در $x=\circ$ پیوسته و g فقط از راست پیوسته است، به‌همین دلیل در محاسبه‌ی $f'(\circ)$ و $g'_+(\circ)$ می‌توانستیم از ضابطه‌های f' و g' استفاده کنیم.

نکته: در تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a\end{cases}$ به شرط پیوستگی f در $x=a$، می‌توانیم برای محاسبه‌ی $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ از حد مشتق ضابطه‌ها وقتی $x\to a$ استفاده کنیم.

➢ **تذکر:** پیوستگی راست f در $x=a$ برای $f'_+(a)$ و پیوستگی چپ آن برای $f'_-(a)$ کافی است.

قضیه: ۱- اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط $g(a)\neq\circ$) نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر خواهند بود.
۲- اگر f در $x=a$ مشتق‌پذیر و g در $x=f(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع gof نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم توابع چند جمله‌ای، توابع گویا (یعنی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که P و Q دو چند جمله‌ای‌اند)، توابع مثلثاتی و جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چنین توابعی در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیرند. معمولاًنقاط مشتق‌ناپذیری در سه دسته از توابع ظاهر می شوند، ۱- توابع اصم، ۲- توابع شامل قدر مطلق و ۳- توابع شامل جزء صحیح.

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع اصم**
۱- تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ($n\in N$، $n\geq ۲$) برای n های فرد تنها در نقطه‌ی $x=\circ$ مشتق‌ناپذیر است و برای n های زوج، نقاط $x<\circ$ نیز از دامنه‌ی آن حذف می‌شوند.
۲- تابع $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ که در آن f یک چند جمله‌ای است، تنها ممکن است در ریشه‌های f مشتق‌ناپذیر باشد. البته برای n های زوج باید محدوده‌ی دامنه نیز در نظر گرفته شود. به بیان دقیق‌تر، اگر $x=a$ ریشه‌ی ساده یا مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m باشد، و $m<n$، تابع g در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است.

➢ **تذکر:** $x=a$ ریشه‌ی مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m است، اگر $f(x)=(x-a)^m h(x)$ که $x=a$ ریشه‌ی h نیست. برای مثال در $f(x)=x(x-۱)^۲(x+۱)^۳$، عدد $x=\circ$ ریشه‌ی ساده‌ی f است، ولی $x=۱$ و $x=-۱$ ریشه‌های مکرر f از مرتبه‌ی تکرار ۲ و ۳ هستند.

مثال: تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x^۴(x-۱)^۲(x+۲)}$ در نقاط $x=۱$ و $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است. ولی در $x=\circ$ با آن‌که ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است، مشتق‌پذیر می‌باشد، زیرا درجه‌ی تکرار $x=\circ$ از مرتبه‌ی ۴ است و $۴>۳$. ولی درجه‌ی تکرار ۲ ریشه‌ی دیگر، ۲ و ۱ است که هر دو از ۳ کم‌ترند. مثلاًبرای $x=۱$ داریم:

$$g'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{g(x)}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt[۳]{x^۴(x-۱)^۲(x+۲)}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt[۳]{x^۴(x+۲)}}{\sqrt[۳]{x-۱}}=\frac{\sqrt[۳]{۳}}{\circ^+}=+\infty\to \text{وجود ندارد } g'_+(۱)$$

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع شامل قدر مطلق**
اگر $f(x)=|g(x)|$ و تابع g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، f در صورتی در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است که $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد.

➢ **تذکر:** برای آن‌که $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد، باید $g(a)=\circ$، ولی $g'(a)\neq\circ$.

➢ **تذکر:** در حالت خاصی که g چند جمله‌ای باشد، باید $g(x)=(x-a)h(x)$ طوری‌که $h(a)\neq\circ$.

➢ **تذکر:** همانند بحث پیوستگی، مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری فقط در نقاط دامنه‌ی تابع مطرح می‌شود.

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع شامل جزء صحیح**
تابع $y=[f(x)]$ در تمام نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر نیز هست (با مشتقی برابر صفر)، و در نقاط دیگر ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

مفهوم نکته‌ی بالا واضح است: در نقاطی که تابع $y=[f(x)]$ پیوسته است، نمودار آن از پاره‌خطی افقی تشکیل شده، بنابراین مشتق‌پذیر (با مشتقی برابر صفر) می‌باشد.

انواع نقاط مشتق‌ناپذیری:

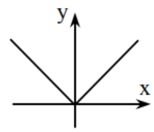
دیدیم که دسته‌ی اول نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع، همان نقاط ناپیوستگی هستند. ولی نقاط دیگر مشتق‌ناپذیری را (یعنی نقاطی که تابع در آن‌ها پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست) می‌توانیم به سه دسته‌ی زیر تقسیم کنیم:

۱- نقاط زاویه دار: نقاطی که مانند $x=a$ در آن‌ها f پیوسته است و حداقل یکی از دو مقدار $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود است، ولی تابع مشتق‌ناپذیر است.

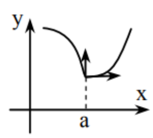
در این نقاط می‌توانیم دو نیم‌مماس از چپ و راست بر نمودار تابع رسم کنیم که با هم یک زاویه تشکیل می‌دهند.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=۰$ یک نقطه‌ی زاویه‌دار دارد، زیرا:

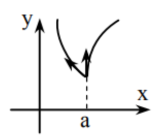
$$f'_+(۰)=۱ \quad , \quad f'_-(۰)=-۱$$



به دو نمودار مقابل نیز دقت کنید:



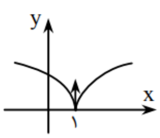
$f'_-(a)=-\infty$
$f'_+(a)=۰$



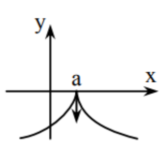
$f'_-(a)=$ عدد حقیقی
$f'_+(a)=+\infty$

۲- نقاط بازگشت: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو نامتناهی‌اند، ولی با علامت‌های مختلف (یعنی $f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$ یا بر عکس).

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ در نقطه‌ی $x=۱$ نقطه‌ی بازگشت دارد، زیرا $f'_+(۱)=+\infty$ و $f'_-(۱)=-\infty$. به نمودار تابع دقت کنید:

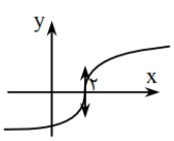


هم‌چنین به نمودار روبه‌رو دقت کنید:



$$\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$$

۳- نقاط عطف قائم: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty$ یا $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$.



مثال: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ عطف قائم دارد. به نمودار تابع دقت کنید. داریم: $f'_+(۲)=+\infty$ و $f'_-(۲)=+\infty$.

مشتق توابع

۵-۷: آهنگ تغییرات

با مفهوم «آهنگ تغییر» یا «نرخ رشد یا زوال یک متغیر» در مسائل روزمره آشنا هستید. مثلاً وقتی که داخل یک بالن هوا وارد می‌کنیم، حجم و شعاع بالن با سرعت‌های مختلف (و در عین حال مرتبط با هم) افزوده می‌شوند. این نرخ تغییر حجم یا شعاع، همان آهنگ تغییر آن‌ها است. حجم و شعاع بالن نمونه‌ای از «کمیت‌های وابسته» هستند. معمولاً وقتی در یک آزمایش روزمره با چند کمیت وابسته به یکدیگر مواجه‌ایم، به‌دست آوردن آهنگ تغییر یکی از آن‌ها ساده‌تر از کمیت‌های دیگر است. مثلاً در آزمایش «وارد کردن هوا به بالن»، اندازه‌گیری آهنگ تغییر حجم بالن (که همان حجم هوای ورودی به بالن است) با استفاده از درجه‌های منابع تأمین‌کننده‌ی این هوا بسیار ساده است. ولی اندازه‌گیری شعاع بالن و به‌دست آوردن آهنگ تغییر آن به شیوه ی کاملاً تجربی امری مشکل است. حال آن‌که کافی است با یک معادله‌ی ساده، آهنگ تغییر این دو کمیت را به هم مربوط سازید تا از یکی، دیگری را به‌دست آورید.

تعریف: **۱- فرض کنید $y=f(x)$ تابعی از x باشد. «آهنگ متوسط تغییر» تابع y نسبت به x در فاصله‌ی $[a,b]$، برابر نسبت تغییرات y به تغییرات x است، یعنی:**

$$\bar{y}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

۲- اگر فاصله‌ی $[a,b]$ به یک لحظه محدود شود، «آهنگ آنی» یا «آهنگ لحظه‌ای» تغییر تابع به‌دست می‌آید. به بیان دقیق‌تر:

$$\text{آهنگ آنی تغییر}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

پس همواره منظور از آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر، همان مقدار مشتق تابع است. مفهوم آهنگ تغییر معمولاً برای توابعی به کار می‌رود که بر حسب زمان بیان شده‌اند.

مسأله‌ی (۱): تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ مفروض است.

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع را بر بازه‌ی $[3,3/3]$ بیابید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع را در نقطه‌ی $x=3$ به‌دست آورید.

حل: الف) آهنگ متوسط تغییر، برابر نسبت تغییرات $f(x)$ به تغییرات x است:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)-1\xrightarrow[x_2=3/3]{x_1=3}\frac{1}{2}(x_1+x_2)-1=2/15$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق تابع است:

$$f'(x)=x-1\Rightarrow f'(3)=2$$

مسأله‌ی (۲): یک بالن کروی شکل را با هوا پر می‌کنیم.

الف) آهنگ تغییر (متوسط و لحظه‌ای) حجم بالن نسبت به شعاع آن را به‌دست آورید.

ب) آهنگ آنی تغییر شعاع نسبت به حجم را به‌دست آورید.

حل: الف) می‌دانیم حجم کره‌ی بالن از معادله‌ی $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ به‌دست می‌آید. V تابعی از R است (و می‌توانیم آن را با $V(R)$ نشان دهیم).

برای آهنگ متوسط تغییر V نسبت به R (از شعاع R_1 تا R_2) داریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta R}=\frac{V_2-V_1}{R_2-R_1}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{R_2^3-R_1^3}{R_2-R_1}=\frac{4}{3}\pi(R_2^2+R_1R_2+R_1^2)$$

برای محاسبه‌ی آهنگ آنی تغییر V نسبت به R، مطابق تعریف، باید مشتق بگیریم:

$$\frac{dV}{dR}=\frac{4}{3}\pi\times 3R^2=4\pi R^2$$

ب) این بار R را به عنوان تابعی بر حسب V در نظر گرفته‌ایم و می‌خواهیم $\frac{dR}{dV}$ را به‌دست آوریم. از دو طرف معادله بر حسب V مشتق می‌گیریم (به صورت ضمنی):

$$1=\frac{4}{3}\pi\times 3R^2\frac{dR}{dV}\Rightarrow\frac{dR}{dV}=\frac{1}{4\pi R^2}$$

مسأله‌ی (۳): از یک بالن کروی شکل، هوا با سرعت $0/1\ \frac{m^3}{s}$ خارج می‌شود. هنگامی که قطر بالن ۶ متر است، آهنگ تغییر شعاع و مساحت کره را بیابید.

حل: منظور از سرعت خارج‌شدن هوا، همان سرعت کم‌شدن حجم کره است. می‌دانیم مفهوم «سرعت»، به معنای آهنگ تغییر حجم کره نسبت به زمان است. یعنی V تابعی بر حسب زمان می‌باشد و داریم: $\frac{dV}{dt}=-0/1\ \frac{m^3}{s}$. با این فرض می‌خواهیم $\frac{dR}{dt}$ و $\frac{dS}{dt}$ را بیابیم. با توجه به رابطه‌ی $V=\frac{4}{3}\pi R^3$، طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\times 3R^2\frac{dR}{dt}=4\pi R^2\frac{dR}{dt}$$

حال در حالت $R=3$ (قطر کره برابر ۶ متر)، داریم:

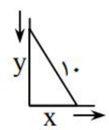
$$\frac{dV}{dt}=-0/1\ \frac{m^3}{s}\quad,\quad R=3\ \Rightarrow\ -0/1=4\pi\times 3^2\frac{dR}{dt}\Rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{-0/1}{36\pi}=-\frac{1}{360\pi}$$

برای محاسبه‌ی آهنگ تغییر مساحت کره، آن را به شعاع ارتباط می‌دهیم:

$$S=4\pi R^2\Rightarrow\frac{dS}{dt}=8\pi R\frac{dR}{dt}\xrightarrow{R=3}\frac{dS}{dt}=24\pi\times\left(-\frac{1}{360\pi}\right)=-\frac{1}{15}$$

پس شعاع کره با آهنگ تغییر $\frac{1}{360\pi}\frac{m}{s}$ و مساحت کره با آهنگ $\frac{1}{15}\frac{m^2}{s}$ کاهش می‌یابند.

مسأله‌ی (۴): نردبانی به طول ۱۰ متر به یک دیوار عمودی تکیه داده‌ایم و پایه‌ی آن تا دیوار ۶ متر فاصله دارد. پایه‌ی نردبان با سرعت $1\ \frac{m}{s}$ شروع به لغزیدن می‌کند. لبه‌ی بالایی نردبان با چه سرعتی روی دیوار به پایین سر می‌خورد؟



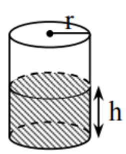
حل: شکل مقابل بیانگر وضعیت شهودی نردبان است. می‌خواهیم وقتی که $\frac{dx}{dt}=1\ \frac{m}{s}$ و $x=6m$، مقدار $\frac{dy}{dt}$ را بیابیم. مانند مثال قبل x و y را با یک تساوی به هم ربط می‌دهیم و از دو طرف تساوی بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$x^2+y^2=10^2=100\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\quad,\quad\frac{dx}{dt}=1\Rightarrow x+y\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}$$

در حالتی که $x=6m$، داریم: $y=8m$، بنابراین: $\frac{dy}{dt}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$. علامت منفی نشان دهنده‌ی حرکت لبه‌ی بالایی در خلاف جهت لبه‌ی پایینی است. یعنی یکی در جهت کاهش متغیر و دیگری در جهت افزایش متغیر حرکت می‌کنند. پس در این شرایط لبه‌ی بالایی نردبان با سرعت $0/75\frac{m}{s}$ به پایین می‌سرد.

مسأله‌ی (۵): از یک مخزن استوانه‌ای شکل به شعاع قاعده‌ی $3m$، آب با آهنگ $3\ \frac{lit}{s}$ خارج می‌شود. سطح آب در این مخزن با چه سرعتی پایین می‌رود؟

حل: اگر $r=3\ m$ شعاع قاعده، h ارتفاع آب در مخزن و V حجم آب باشد، طبق فرض مسأله $\frac{dV}{dt}=-3\ \frac{lit}{s}$ و می‌خواهیم $\frac{dh}{dt}$ را حساب کنیم. داریم:



$$\frac{dV}{dt}=-3\frac{lit}{s}=-3\times\frac{1}{1000}\frac{m^3}{s}=-\frac{3}{1000}\frac{m^3}{s}$$

$$V=\pi r^2h\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\pi r^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow-\frac{3}{1000}=\pi\times 3^2\times\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{-1}{3000\pi}\frac{m}{s}$$

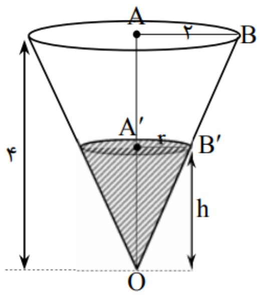
نتیجه:

روش کلی حل مسائل آهنگ تغییرات در کمیت‌های وابسته

۱- مسائل را به دقت بخوانید و در صورت امکان شکل برای آن رسم کنید.
۲- متغیرها را با نمادهای مناسب نامگذاری کنید و هر کدام را به صورت توابعی از زمان در نظر بگیرید.
۳- اطلاعات و فرض‌های مسأله را به صورت ریاضی بیان کنید و خواسته‌ی مسأله را مشخص کنید.
٤- معادلاتی بنویسید که توسط آن‌ها متغیرهای مختلف به هم ربط داده شده باشند. اگر می‌توانید با استفاده از هندسه‌ی مسأله (و جای‌گذاری) تعداد متغیرها را کاهش دهید.
۵- از دو طرف معادلات بر حسب زمان مشتق بگیرید و با جای‌گذاری فرض‌ها، خواسته‌ی سؤال را به‌دست آورید.

مسأله‌ی (۶): یک مخزن آب به شکل یک مخروط معکوس با شعاع قاعده‌ی ۲ متر و ارتفاع ۴ متر مفروض است. آب با سرعت $۲\frac{m^۳}{min}$ به داخل مخزن وارد می‌شود. در لحظه‌ای که ارتفاع آب ۲ متر است، نرخ رشد ارتفاع را به‌دست آورید.

حل: ارتفاع آب در مخروط را h و شعاع قاعده‌ی آب را r و حجم آن را V فرض می‌کنیم. می‌دانیم $\frac{dV}{dt}=۲\frac{m^۳}{min}$ و می‌خواهیم در لحظه‌ای که $h=۲\ m$، مقدار $\frac{dh}{dt}$ را بیابیم.



معادله‌ی مربوط‌کننده‌ی متغیرها $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ (فرمول حجم مخروط) است (که هر سه متغیر r، h و V توابعی برحسب زمان هستند)، ولی می‌توانیم با استفاده از تشابه دو مثلث OAB و OA′B′ متغیرها را کاهش دهیم. داریم:

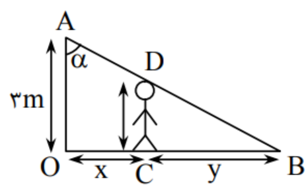
$$\frac{r}{۲}=\frac{h}{۴}\Rightarrow r=\frac{h}{۲}\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi(\frac{h}{۲})^۲h=\frac{\pi}{۱۲}h^۳\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{۱۲}\times۳h^۲\frac{dh}{dt}=\frac{\pi}{۴}h^۲\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=۲\ \frac{m^۳}{min}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{۸}{\pi h^۲}\xrightarrow{h=۲}\frac{dh}{dt}=\frac{۲}{\pi}\ \frac{m}{min}$$

مسأله‌ی (۷): در یک خیابان یک لامپ روی تیر چراغ برقی به ارتفاع ۳ متر قرار گرفته است. کودکی با قد ۱/۲ متر با سرعت $۴\frac{m}{s}$ در خیابان می‌دود و از تیر چراغ برق دور می‌شود.

الف) در لحظه‌ای که فاصله‌ی شخص با تیر برق ۲ متر است، سرعت افزایش طول سایه‌ی فرد روی زمین چقدر است؟

ب) اگر α زاویه‌ی رؤیت سایه از ناظری روی لامپ باشد (زاویه‌ی بین خط رؤیت انتهای سایه و راستای عمود)، نرخ رشد α را در این لحظه به‌دست آورید.



حل: در شکل مقابل A مکان لامپ و B انتهای سایه‌ی فرد است. x فاصله‌ی فرد از تیر چراغ و y طول سایه‌ی فرد است. α نیز زاویه‌ی رؤیت انتهای سایه از لامپ است.

طبق فرض: $\frac{dx}{dt}=۴\ \frac{m}{s}$، و لحظه‌ای را برای تحلیل درنظر گرفته‌ایم که $x=۲m$.

الف) در این حالت $\frac{dy}{dt}$ را می‌خواهیم. از تشابه دو مثلث OAB و BDC استفاده می‌کنیم:

$$\frac{y}{x+y}=\frac{۱/۲}{۳}\Rightarrow\frac{y}{x+y}=۰/۴\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{۰/۴}{۱-۰/۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{۲}{۳}\times\frac{dx}{dt}=\frac{۲}{۳}\times۴=\frac{۸}{۳}\ \frac{m}{s}$$

ب) در این حالت $\frac{d\alpha}{dt}$ را می‌خواهیم. رابطه‌ی مربوط‌کننده‌ی α، x و y به صورت زیر است:

$$\tan\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{x+y}{۳}=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}y$$

حال از دو طرف نسبت به t مشتق بگیرید:

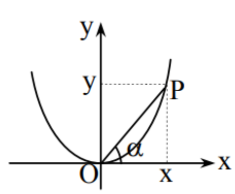
$$(۱+\tan^۲\alpha)\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱}{۳}\frac{dx}{dt}+\frac{۱}{۳}\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱}{۳(۱+\tan^۲\alpha)}(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt})$$

حال در حالت $x=۲$ داریم:

$$x=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۳}\times۲+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۱۰}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}|_{x=۲}=\frac{۱}{۳(۱+\frac{۱۰۰}{۸۱})}(۴+\frac{۸}{۳})=\frac{۱۸۰}{۱۸۱}\ \frac{rad}{s}$$

مسأله‌ی (۸): ذره‌ی P در ربع اول دستگاه مختصات روی سهمی $y=x^۲$ چنان حرکت می‌کند که تصویر ذره روی محور xها با سرعت $۱۰\ \frac{m}{s}$ پیش می‌رود. آهنگ تغییر زاویه‌ی OP با جهت مثبت محور xها را بیابید وقتی که $x=۳m$.



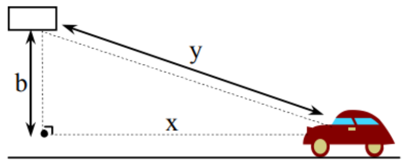
حل: زاویه‌ی مورد نظر را α نامیده‌ایم. به وضوح همواره $y=x^۲$ و داریم:

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{x^۲}{x}=x\Rightarrow(۱+\tan^۲\alpha)\frac{d\alpha}{dt}=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}\frac{dx}{dt}$$

از فرض سؤال می‌دانیم: $\frac{dx}{dt}=۱۰\ \frac{m}{s}$، بنابراین:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱۰}{۱+\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha=x=۳}\frac{d\alpha}{dt}|_{x=۳}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱\ \frac{rad}{s}$$

مسأله‌ی (۹): هواپیمای مراقبت جاده با سرعت $a\dfrac{m}{s}$ در ارتفاع b متری از سطح زمین، بالای جاده در مسیر مستقیمی حرکت می‌کند و به بالای اتومبیلی نزدیک می‌شود. رادار هواپیما مشخص می‌کند که فاصله‌ی بین اتومبیل روی جاده و هواپیما c متر است، و این فاصله با آهنگ $k\dfrac{m}{s}$ در حال کاهش می‌باشد. سرعت اتومبیل در جاده را بیابید.



حل: فاصله‌ی اتومبیل و هواپیما را y می‌نامیم و فاصله‌ی اتومبیل تا تصویر قائم هواپیما را x،

واضح است که $y^۲ = b^۲ + x^۲$. از فرض سؤال می‌دانیم: $\dfrac{dy}{dt} = k\dfrac{m}{s}$

اگر سرعت هواپیما $V_۱$ و سرعت اتومبیل $V_۲$ باشد، داریم: $\dfrac{dx}{dt} = V_۱ + V_۲$. (دقت کنید که چون هر دو متحرک‌اند، فاصله‌ی x از هردوی آن‌ها متأثر است، و نرخ تغییرات x برابر با مجموع نرخ تغییرات اتومبیل و هواپیما می‌باشد). چون $V_۱ = a$، پس: $V_۲ = \dfrac{dx}{dt} - a$ و داریم:

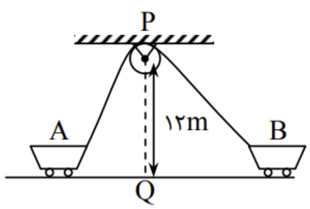
$$y^۲ = b^۲ + x^۲ \Rightarrow ۲y\frac{dy}{dt} = ۲x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = k \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{ky}{x}$$

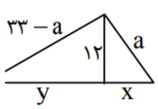
در لحظه‌ی مورد نظر داریم $y = c$، بنابراین: $x = \sqrt{c^۲ - b^۲}$ و در نتیجه:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ky}{x} = \frac{kc}{\sqrt{c^۲ - b^۲}} \Rightarrow V_۲ = \frac{dx}{dt} - a = \frac{kc - a\sqrt{c^۲ - b^۲}}{\sqrt{c^۲ - b^۲}}$$

مسأله‌ی (۱۰): واگن‌های A و B با طنابی به طول $۳۳m$ که حول قرقره‌ی P به راحتی حرکت می‌کند، به هم متصل شده‌اند. ارتفاع P از سطح زمین ۱۲ متر است. واگن A با سرعت $۲\dfrac{m}{s}$ از نقطه‌ی Q دور می‌شود. در لحظه‌ای که فاصله‌ی A از Q، ۵ متر است، واگن B با چه سرعتی به Q نزدیک می‌شود؟



حل: شکل روبه‌رو را که صورت ساده‌شده‌ی شکل اصلی است، در نظر بگیرید. می‌دانیم $\dfrac{dy}{dt} = ۲\dfrac{m}{s}$ و می‌خواهیم $\dfrac{dx}{dt}$ را بیابیم.



لحظه‌ای را که $y = ۵$ است، $t = t_۰$ می‌نامیم. داریم:

$$y = ۵ \Rightarrow (۳۳ - a)^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow ۳۳ - a = ۱۳ \Rightarrow a = ۲۰ \Rightarrow x^۲ = ۲۰^۲ - ۱۲^۲ \Rightarrow x = ۱۶$$

حالا آهنگ تغییر متغیرها را حساب می‌کنیم:

$$(۳۳ - a)^۲ = ۱۲^۲ + y^۲ \Rightarrow -۲(۳۳ - a)\frac{da}{dt} = ۲y\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{da}{dt}\Big|_{t=t_۰} = \frac{۲\times۵\times۲}{-۲\times۱۳} = -\frac{۱۰}{۱۳}$$

$$a^۲ = ۱۲^۲ + x^۲ \Rightarrow ۲a\frac{da}{dt} = ۲x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_۰} = \frac{۲۰}{۱۶}\times\left(-\frac{۱۰}{۱۳}\right) = -\frac{۲۵}{۲۶}$$

پس واگن دوم با سرعت $\dfrac{۲۵}{۲۶}\dfrac{m}{s}$ به نقطه‌ی Q نزدیک می‌شود.

مشتق توابع

۵–۵: مشتق تابع مرکب و تابع وارون

با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل خوانده‌ایم، می‌توانیم مشتق برخی از توابع پیچیده را به‌دست آوریم. ولی آن قضایا برای محاسبه‌ی مشتق تابعی چون $y = \sqrt{۱ + x^۲}$ کمکی نمی‌کنند. چون این تابع را می‌توانیم به‌صورت ترکیبی از توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = ۱ + x^۲$ بیان کنیم، پس باید قاعده‌ای برای مشتق توابع مرکب پیدا کنیم.

قضیه:

قاعده‌ی زنجیره‌ای

فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $F = fog$ ترکیب آن دو باشد. در این صورت داریم:

$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

◀ **مثال:** فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x}$، $g(x)=x^2-4$ و $h(x)=fog(x)$. مشتق‌های دو تابع f و g عبارت اند از: $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ و $g'(x)=2x$.

بنابراین:

$$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)=\frac{-1}{(g(x))^2}\times 2x=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی تقسیم مشتق‌ها، مشتق تابع $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ را بیابید و با رابطه‌ی بالا آن را مقایسه کنید.

➢ **تذکر:** قاعده‌ی زنجیره‌ای را با نماد دیگر مشتق، می‌توان به این شکل جالب نیز بیان کرد:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dg}\times\frac{dg}{dx}$$

قاعده‌ی زنجیره‌ای، مهم‌ترین بحث محاسبه‌ی مشتق توابع است، که با حل مثال‌های متنوع می‌توانید بر آن تسلط پیدا کنید. در مثال‌های اولیه سعی کنید توابع را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید و با جای‌گذاری در قاعده، مشتق تابع را حساب کنید. در این صورت مهارت‌تان افزایش می‌یابد و می‌توانید در مثال های بعدی مستقیماً عمل کنید.

❍ مسأله‌ی (۱): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(7x-3)^{10}$ **ب)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ **پ)** $f(x)=(\frac{x-2}{2x+1})^9$

ت) $f(x)=\sin x^2$ **ث)** $f(x)=\cos(\sin x)$ **ج)** $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$

حل: الف) اگر $g(x)=x^{10}$ و $h(x)=7x-3$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=10x^9\ ,\ h'(x)=7\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=10(7x-3)^9\times 7=70(7x-3)^9$$

ب) اگر $g(x)=x^{\frac{-1}{3}}$ و $h(x)=x^2+x+1$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}\ ,\ h'(x)=2x+1\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{-4}{3}}\times(2x+1)$$

پ) اگر $g(x)=x^9$ و $h(x)=\frac{x-2}{2x+1}$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=9x^8\ ,\ h'(x)=\frac{1\times1-(-2)\times2}{(2x+1)^2}=\frac{5}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=g'(h(x))h'(x)=9(\frac{x-2}{2x+1})^8\times\frac{5}{(2x+1)^2}=\frac{45(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}$$

ت) اگر $g(x)=\sin x$ و $h(x)=x^2$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=\cos x\ ,\ h'(x)=2x\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=\cos x^2\times 2x$$

ث) اگر $g(x)=\cos x$ و $h(x)=\sin x$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=-\sin x\ ,\ h'(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=-\sin(\sin x)\cos x$$

ه) اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=\sin x^2$، داریم: $f=goh$ می‌توانیم بنویسیم:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}\times h'(x)$$

اما تابع $h(x)$ خود یک تابع مرکب است و مشتق آن طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای مانند قسمت (ث) به‌دست می‌آید:

$$h'(x)=2x\cos x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cos x^2}{2\sqrt{\sin x^2}}=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

در مسأله‌ی (۱)، قسمت‌های (الف)- (ث) نمونه‌هایی از ترکیب دو تابع را حل کردید. ولی در قسمت (ج) تابع نهایی ترکیبی از سه تابع بود. در همه‌ی قسمت‌ها به این نکته دقت کنید که در زنجیره‌ای از توابع، از بیرونی‌ترین تابع شروع می‌کنیم و با مشتق‌گیری مرحله به مرحله به درونی‌ترین تابع می‌رسیم. در مسأله‌ی بعد چند نمونه‌ی پیچیده‌تر را بررسی می‌کنیم.

مسأله‌ی (۲): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin(\cos(\tan x))$ **ب)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x^3}}$ **پ)** $f(x)=\sin(x\cos x)$

ت) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ **ث)** $f(x)=\sin(\tan(\sqrt{\sin x})$

حل: الف) اگر قرار دهیم $g(x)=\cos(\tan x)$، داریم:

$$g(x)=\cos(\tan x) \Rightarrow g'(x)=-\sin(\tan x)\times(1+\tan^2 x)$$

$$f(x)=\sin(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\cos(g(x))g'(x)=-\cos(\cos(\tan x))\times\sin(\tan x)\times(1+\tan^2 x)$$

ب) اگر قرار دهیم $g(x)=\cos x^3$، داریم:

$$g(x)=\cos x^3 \Rightarrow g'(x)=-\sin x^3\times(x^3)'=-\sin x^3\times 3x^2$$

$$f(x)=(g(x))^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}(g(x))^{\frac{-3}{2}}\times g'(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(\cos x^3)^{\frac{-3}{2}}\sin x^3\times x^2$$

پ) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x)=\cos(x\cos x)\times(x\cos x)'=\cos(x\cos x)\times(\cos x+x(-\sin x))=(\cos x-x\sin x)\cos(x\cos x)$$

ت) اگر $g(x)=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$، داریم:

$$g'(x)=1+(\sqrt{x+\sqrt{x}})'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$f(x)=\sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\times g'(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}))$$

ث) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x)=\cos(\tan(\sqrt{\sin x}))\times(\tan(\sqrt{\sin x}))'$$

$$=\cos(\tan(\sqrt{\sin x}))\times(1+\tan^2(\sqrt{\sin x}))\times(\sqrt{\sin x})'=\cos(\tan(\sqrt{\sin x}))\times(1+\tan^2(\sqrt{\sin x}))\times\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\times(\cos x)$$

همان‌طور که در دو مسأله‌ی قبل ملاحظه کردید، قاعده‌ی زنجیره‌ای قاعده‌ای نکته‌دار و پیچیده نیست. نامی هم که بر آن گذاشته اند، کـاملاً برازنده‌ی مفهوم آن است.

مسأله‌ی (۸): الف) اگر $f(x)=\frac{(x-2)\sqrt[5]{21x-10}}{(x+1)^3}$، مقدار $f'(2)$ را بیابید.

ب) اگر $f(x)=\sin x\cos x$، مقدار $f'(\pi)$ را بیابید.

حل: الف) محاسبه‌ی مشتق $f(x)$ در نقطه‌ی $x=2$ از راه تعریف آن، بسیار ساده‌تر از محاسبه‌ی تابع مشتق f است. داریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x-2)\sqrt[5]{21x-10}}{(x+1)^3}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{21x-10}}{(x+1)^3}=\frac{2}{27}$$

ب) چون $\sin\pi=0$، پس $f(\pi)=0$. اگر بخواهیم از تعریف مشتق $f(x)$ استفاده کنیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x-0}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\times\lim_{x\to\pi}\cos x$$

چون $\sin\pi=0$، مقدار حد اول همان مشتق $\sin x$ در نقطه‌ی $x=\pi$ است، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)\Big|_{x=\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-\sin\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\cos\pi=-1$$

بنابراین: $f'(\pi)=(-1)\times\lim_{x\to\pi}\cos x=(-1)\times(-1)=1$

در مسأله‌ی (۸)، در هر دو قسمت مشتق تابع را در نقطه‌ای می‌خواستیم به‌دست آوریم که آن نقطه ریشه‌ی یکی از اجزای تابع بود، یعنی تابع از ضرب چند تابع دیگر تشکیل می‌شد که یکی از آن‌ها به ازای آن نقطه صفر می‌شد. به چنین عاملی اصطلاحاً «عامل صفرکننده» می‌گویند.

نکته: عامل صفرکننده

فرض کنید می‌خواهیم مشتق $f(x)=g(x)h(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ بیابیم و می‌دانیم $x=a$ ریشه‌ی $g(x)$ است. در این صورت اگر g در $x=a$ مشتق‌پذیر و h در این نقطه پیوسته باشد، داریم:

$f'(a)=g'(a)h(a)$

به بیان دیگر: برای محاسبه‌ی مشتق تابع در نقطه‌ای که ریشه‌ی عامل صفرکننده‌ی آن است، کافی است تنها از همان عامل صفرکننده مشتق بگیریم.

➢ **تذکر:** در حالت خاص، اگر $f(x)=(x-a)h(x)$، با شرط پیوستگی h در $x=a$، داریم: $f'(a)=h(a)$

اثبات: با توجه به این که $x=a$ ریشه‌ی g است، داریم:

$$g(a)=0\Rightarrow f(a)=g(a)h(a)=0$$

حال با استفاده از تعریف مشتق، مقدار $f'(a)$ را می‌یابیم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{x-a}\xrightarrow{f(x)=g(x)h(x)}f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)h(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}\times\lim_{x\to a}h(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}g(a)=0\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\\ \text{پیوسته } x=a \text{ در } h\Rightarrow\lim_{x\to a}h(x)=h(a)\end{array}\right\}\Rightarrow f'(a)=g'(a)h(a)$$

مسأله‌ی (۹): مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

الف) $f(x)=\sin(\pi x)\cos^{10}(\frac{\pi}{4}x)$ در $x=1$ **ب)** $f(x)=\sin(\pi x)|x-10|$ در $x=10$

پ) $f(x)=x[x]$ در $x=0$

حل: الف) $x=1$ مقدار $\sin(\pi x)$ را صفر می‌کند. پس تنها کافی است از $\sin(\pi x)$ مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx}(\sin\pi x)=\cos(\pi x)\times\pi\Rightarrow f'(1)=\pi\times\cos(\pi)\times\cos^{10}(\frac{\pi}{4})=\pi\times(-1)\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^{10}=-\frac{\pi}{32}$$

ب) $x=10$ هر دو تابع $\sin(\pi x)$ و $|x-10|$ را صفر می‌کند. ولی $|x-10|$ در $x=10$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)، و عامل صفرکننده همان $\sin\pi x$ است. پس:

$$f'(10)=\pi\times\cos(10\pi)\times|10-10|=0$$

پ) عامل صفرکننده x است، ولی چون $y=[x]$ در $x=0$ پیوسته نیست، نمی‌توانیم از نکته‌ی ذکرشده استفاده کنیم. درواقع این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x[x]-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}[x]=0 \quad , \quad f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x[x]-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}[x]=-1$$

مشتق در توابع چند ضابطه‌ای

در بخش (۵-۳) مثال‌هایی مقدماتی از توابع چندضابطه‌ای حل کردیم و مشتق‌پذیری آن‌ها به ویژه در نقاط مرزی را بررسی کردیم. اکنون با توجه به مطالبی که آموخته‌ایم، می‌توانیم چنین مسائلی را بهتر بررسی کنیم.

◄ **مثال:** فرض کنید مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$ را می‌خواهیم به‌دست آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=1$ تابع در بقیه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 2 & x<1\end{cases}$$

می‌بینید که شرط ضابطه‌ی اول، یعنی $x\ge1$، به $x>1$ تغییر کرده است. برای یافتن دقیق‌تر مشتق باید نقطه‌ی $x=1$ را نیز بررسی کنیم. می‌توانیم از تعریف مشتق، دو حد $f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x-1-1}{x-1}$ را تشکیل دهیم. ولی راه بهتر استفاده از همان ضابطه‌ی $f'(x)$ است. در واقع چون تابع f در $x=1$ پیوسته است (چرا؟)، می‌توانیم مقادیر $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را از همان دو ضابطه‌ی f' به‌دست آوریم، یعنی:

$f'_+(1)=2\times1=2$ و $f'_-(1)=2$، پس $f'(1)$ وجود دارد و می‌توانیم ضابطه‌ی $f'(x)$ را به شکل دقیق‌تر $f'(x)=\begin{cases}2x & x\ge1\\ 2 & x\le1\end{cases}$ بنویسیم.

نکته: **اگر یک تابع چندضابطه‌ای در نقطه‌ی مرزی $x=a$ (نقطه‌ی مرزی بین دو ضابطه) پیوسته باشد، برای محاسبه‌ی مقدار مشتق چپ و راست آن در نقطه‌ی $x=a$ می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم.**

مسأله‌ی (۱۰): مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در R مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x<0\\ 2\sin x+3\cos x & x\ge0\end{cases}$$

حل: ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. هر دو ضابطه به تنهایی در R پیوسته‌اند، پس تنها باید نقطه‌ی مرزی $x=0$ را بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow a\times0+b=2\sin0+3\cos0\Rightarrow b=3$$

حال مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=0$، در نقاط دیگر تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}a & x<0\\ 2\cos x-3\sin x & x>0\end{cases}$$

برای مشتق‌پذیری تابع در R، باید $f'_+(0) = f'_-(0)$. چون f در $x = 0$ پیوسته است، پس می‌توانیم طبق نکته‌ی قبل از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_+(0) = 2\cos 0 - 3\sin 0 = 2 \quad , \quad f'_-(0) = a \xrightarrow{f'_+(0)=f'_-(0)} a = 2$$

❍ **مسأله‌ی (۱۱): آیا تابع** $f(x) = \begin{cases} 2\sin x - 1 & x > 0 \\ 2x - 3 & x \le 0 \end{cases}$ **در** $x = 0$ **مشتق‌پذیر است؟**

حل: خیر! ابتدا از دو ضابطه مشتق می‌گیرند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cos x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

سپس با استفاده از ضابطه‌ها نتیجه می‌گیرند که $f'_+(0) = 2$ ، $f'_-(0) = 2$ و می‌گویند f در $x = 0$ مشتق‌پذیر است. در حالی که این تابع در $x = 0$ اصلاً پیوسته نیست که مشتق‌پذیر باشد! علّت اشتباه این این است که به شرط پیوستگی در نکته‌ی قبل دقت نکرده‌اند.

❍ **مسأله‌ی (۱۲): اگر** $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ **، مقادیر** $f'(0)$ **و** $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ **را به‌دست آورید.**

حل: با توجه به این که ضابطه‌ی اول در تمام نقاط $R - \{0\}$ مشتق‌پذیر است، از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos(\frac{1}{x}) \times (-\frac{1}{x^2}) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

حد اول برابر صفر است (طبق قضیه‌ی فشردگی)، ولی حد دوم وجود ندارد. پس $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ وجود ندارد. اما نتیجه‌ی جالب این است که $f'(0)$ وجود دارد:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

یادداشت: این تابع نمونه‌ای از توابعی است که در R مشتق‌پذیرند، ولی مشتق آن‌ها در R پیوسته نیست.

مشتق در توابع شامل قدرمطلق

معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند، بهتر است ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و تعیین محدوده، قدرمطلق را حذف کنیم، سپس از تابع مشتق بگیریم.

❍ **مسأله‌ی (۱۳):** مشتق تابع $f(x) = (x^2 - 1)^2 |x + 1|$ **را به‌دست آورید.**

حل: تابع f را می‌توان به صورت دو ضابطه‌ای بیان کرد:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 |x + 1| = \begin{cases} (x^2 - 1)^2 (x + 1) & x \ge -1 \\ -(x^2 - 1)^2 (x + 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 & x \ge -1 \\ -(x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1) & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 & x > -1 \\ -5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 & x < -1 \end{cases}$$

تنها باید در نقطه‌ی $x = -1$ جداگانه مشتق را بررسی کنیم که: $f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0$

مسأله‌ی (۱۴): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=|x+1|+|x+2|$ **ب)** $f(x)=\sin|x|$ * **پ)** $f(x)=\sin\pi x\,|\sin\pi x|$

حل: الف) با تعیین محدوده‌ی قدرمطلق‌ها و حذف آن‌ها ضابطه‌ی f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+1+x+2 & x\geq -1\\ -x-1+x+2 & -2<x<-1\\ -x-1-x-2 & x\leq -2\end{cases}=\begin{cases}2x+3 & x\geq -1\\ 1 & -2<x<-1\\ -2x-3 & x\leq -2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & x>-1\\ 0 & -2<x<-1\\ -2 & x<-2\end{cases}$$

در نقاط $x=-1$ و $x=-2$ به وضوح تابع مشتق‌پذیر نیست.

ب) با تعیین محدوده داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\geq 0\\ -\sin x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ -\cos x & x<0\end{cases}$$

تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. ($f'_{+}(0)=1$ و $f'_{-}(0)=-1$)

پ) تابع $y=\sin\pi x$ در فاصله‌های $2n\pi<\pi x<(2n+1)\pi$ مثبت و در فاصله‌های $(2n+1)\pi<\pi x<(2n+2)\pi$ منفی است $(n\in Z)$ و ریشه‌های آن در نقاط $x=n$ رخ می‌دهد. پس:

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2\pi x & x\in(2n,2n+1)\\ 0 & x=n\\ -\sin^2\pi x & x\in(2n+1,2n+2)\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2\sin\pi x\cos\pi x\times\pi=\pi\sin 2\pi x & x\in(2n,2n+1)\\ -2\sin\pi x\cos\pi x\times\pi=-\pi\sin 2\pi x & x\in(2n+1,2n+2)\end{cases}$$

در نقاط $x=n$، مشتق راست از یکی از ضابطه‌ها و مشتق چپ از ضابطه‌ی دیگر به‌دست می‌آید، یعنی: $f'_{+}(n)=f'_{-}(n)=0$ (زیرا $\sin 2\pi n=0$ برای $n\in Z$). پس تابع در نقاط $x=n$ نیز مشتق‌پذیر است و می‌توانیم فاصله‌های ضابطه‌ی f' را به جای فاصله‌های باز، فاصله‌های بسته بگذاریم.

مشتق در توابع شامل جزءصحیح

مشتق در توابع شامل جزءصحیح نیز مانند مشتق در توابع شامل قدرمطلق است. یعنی در محدوده‌ی مناسب، بهتر است جزءصحیح را حذف کنیم، سپس مشتق بگیریم.

مسأله‌ی (۱۵): مشتق تابع $f(x)=[x]\sin^2\pi x$ را به‌دست آورید.

حل: در فاصله‌ی $n<x<n+1$ (که $n\in Z$) داریم: $[x]=n$، بنابراین $f(x)=n\sin^2\pi x$. یعنی $[x]$ به صورت یک ضریب عددی ثابت در تابع ظاهر می شود که عیناً در مشتق آن تکرار می‌شود. داریم:

$$f'(x)=n\times 2\sin\pi x\cos\pi x\times(\pi)=n\pi\sin 2\pi x\xrightarrow{n=[x]}f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$$

در نقاط $x=n\in Z$، مقدار $\sin\pi x$ برابر صفر می‌شود، پس تابع پیوسته است (چرا؟)، همچنین برای محاسبه‌ی مشتق راست تابع f در $x=n$، باید از $n\sin^2\pi x$ مشتق بگیریم و برای مشتق چپ آن از $(n-1)\sin^2\pi x$. که هر دو مشتق برابر صفر می‌شوند، در نتیجه:

$$f'(n)=0\qquad (n\in Z)$$

که می‌توان آن را با نتیجه‌ی اول به صورت $f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$ (برای هر $x\in R$) ترکیب کرد.

مشتق تابع وارون

یکی از نتایجی که از قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان به‌دست آورد، درباره‌ی مشتق تابع وارون است. فرض کنید $f(a)=b$ و f تابعی وارون‌پذیر باشد. از $f(a)=b$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(b)=a$. حال برای مشتق‌گیری از f^{-1}، از رابطه‌ی $f^{-1}(f(x))=x$ استفاده می‌کنیم. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$(f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=(x)'\Rightarrow (f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=1$$

$$\xrightarrow[f(a)=b]{x=a}(f^{-1})'(b)\times f'(a)=1\Rightarrow (f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

قضیه: مشتق تابع وارون

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=b$، آن‌گاه با فرض $f'(a)\neq 0$ داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

مسأله‌ی (۱۶): در هر حالت، مقدار خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3+2\sqrt{x}$، $(f^{-1})'(3)=?$

ب) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\geq 1\\ 2x-4 & x<1\end{cases}$، $(f^{-1})'(7)=?$

حل: الف) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x)=3$. واضح است که $f(1)=3$، بنابراین طبق قضیه‌ی قبل داریم: $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}$. از طرفی چون $f'(x)=3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$، پس $f'(1)=4$، بنابراین: $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{4}$

ب) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x)=7$. داریم:

$$3x-2=7\Rightarrow x=3$$

پس $f(3)=7$، درنتیجه $(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(3)}$. از طرفی به وضوح $f'(3)=3$، بنابراین $(f^{-1})'(7)=\frac{1}{3}$.

مشتق توابع وارون مثلثاتی

با استفاده از قضیه‌ی مشتق تابع وارون می‌توانیم مشتق توابع وارون مثلثاتی را پیدا کنیم. فرض کنید می‌خواهیم $(\sin^{-1})'(a)$ را بیابیم. $x_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ را درنظر می‌گیریم که $\sin x_0=a$. طبق قضیه داریم:

$$(\sin^{-1})'(a)=\frac{1}{\sin'(x_0)}=\frac{1}{\cos x_0}$$

از طرفی چون $x_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $\sin x_0=a$، نتیجه می‌گیریم: $\cos x_0=\sqrt{1-a^2}$، بنابراین: $(\sin^{-1})'(a)=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

قضیه: مشتق توابع وارون مثلثاتی

۱- مشتق تابع $y=\sin^{-1}x$ برابر است با: $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x\in(-1,1)$

۲- مشتق تابع $y=\cos^{-1}x$ برابر است با: $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x\in(-1,1)$

۳- مشتق تابع $y=\tan^{-1}x$ برابر است با: $y'=\frac{1}{1+x^2}$

٤- مشتق تابع $y=\cot^{-1}x$ برابر است با: $y'=-\frac{1}{1+x^2}$

مسأله‌ی (۱۷): با استفاده از مشتق، اتحاد $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{۲}$ را ثابت کنید.

حل: تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را درنظر می‌گیریم. این تابع در فاصله‌ی $[-۱,۱]$ پیوسته است. از طرفی در فاصله‌ی $(-۱,۱)$، با مشتق‌گیری از f داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} = ۰$$

می‌دانیم فقط مشتق تابع ثابت برابر صفر است، بنابراین از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم f تابعی ثابت است. حال با توجه به آن که $f(۰) = \sin^{-1}(۰) + \cos^{-1}(۰) = ۰ + \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲}$، پس مقدار ثابت تابع برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. به این ترتیب برای هر $-۱ < x < ۱$ داریم: $f(x) = \frac{\pi}{۲}$

برای دو نقطه‌ی مرزی $x = \pm ۱$ نیز به راحتی درستی اتحاد اثبات می‌شود.

مسأله‌ی (۱۸): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \tan^{-1}(\frac{۲x}{۱-x^۲})$ ب) $f(x) = \sin(\tan^{-1}(\tan x))$

حل: الف) با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۱+(\frac{۲x}{۱-x^۲})^۲} \times (\frac{۲x}{۱-x^۲})' = \frac{(۱-x^۲)^۲}{(۱-x^۲)^۲+۴x^۲} \times \frac{۲(۱-x^۲)-۲x(-۲x)}{(۱-x^۲)^۲} = \frac{۲+۲x^۲}{۱+۲x^۲+x^۴} = \frac{۲(۱+x^۲)}{(۱+x^۲)^۲} = \frac{۲}{۱+x^۲}$$

ب) با استفاده‌ی متوالی از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x)) \times \frac{۱}{۱+\tan^۲ x} \times (۱+\tan^۲ x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x))$$

خواص متقابل f و f'

درباره‌ی ویژگی‌های متقابل f و f' احکامی را می‌توان ثابت کرد که در این جا ما به ذکر دو نکته‌ی نسبتاً مهم از آن‌ها بسنده می‌کنیم.

۱- زوج و فرد بودن

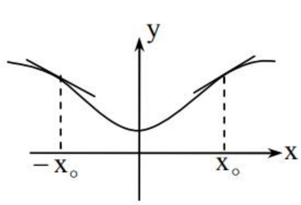
نکته: **اگر تابع f زوج باشد، آن‌گاه f' فرد است و اگر f فرد باشد، آن‌گاه f' زوج است.**

اثبات: اگر f زوج باشد، داریم: $f(-x) = f(x)$. از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم. اگر قرار دهیم $g(x) = f(-x)$، طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم: $g'(x) = f'(-x) \times (-۱) = -f'(-x)$. از طرفی چون $g(x) = f(-x) = f(x)$، داریم: $g'(x) = f'(x)$، بنابراین:

$$-f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

این شرط نشان می‌دهد که تابع f'، تابعی فرد است. تنها باید ثابت کنیم دامنه‌ی آن نسبت به صفر متقارن است. با توجه به این که نمودار f نسبت به محور عرض‌ها متقارن است (چرا؟)، اگر نقطه‌ای سمت راست محور عرض‌ها قرار داشته باشد و مماسی قابل رسم بر نمودار تابع در آن نقطه موجود باشد، در قرینه‌ی آن نیز چنین مماسی قابل رسم است. پس اگر f در $x = x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، در $x = -x_۰$ نیز مشتق‌پذیر است.

بنابراین دامنه‌ی f' نسبت به صفر متقارن است. برای درک بهتر به شکل روبه‌رو نگاه کنید که نمونه‌ای از یک تابع زوج با نمودار متقارن نسبت به محور y ها است. دو خط که در نقاط $x_۰$ و $-x_۰$ بر نمودار مماس شده‌اند، به وضوح شیبی قرینه دارند.



به همین ترتیب اگر f فرد باشد، می‌توان ثابت کرد f' زوج است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = f(-x) \Rightarrow g'(x) = f'(-x) \times (-۱) \\ f(-x) = -f(x) \Rightarrow g(x) = -f(x) \Rightarrow g'(x) = -f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

پس تابع f' زوج است. سعی کنید این نتیجه را با نمودار f نیز توجیه کنید.

○ **مسأله‌ی (۱۹): اگر** $f(x)=\dfrac{x^{۸}+\cos x-۱۳۸۶}{x^{۴}-۲}$**، مقدار** $f'(\circ)$ **را بیابید.**

حل: تابع f زوج است و در $x=\circ$ مشتق‌پذیر است (چرا؟)، پس مشتق آن فرد است. می‌دانیم اگر تابع فردی در نقطه‌ی $x=\circ$ مقدار داشته باشد، حتماً مقدار آن صفر است، پس: $f'(\circ)=\circ$

پرسش: آیا عکس نکته‌ی اخیر نیز، گزاره‌ای درست است؟ یعنی اگر f' **فرد باشد، آن‌گاه f زوج است؟ یا اگر** f' **زوج باشد، لزوماً f فرد است؟**

پاسخ: اگر f' زوج باشد، درباره‌ی f نمی‌توان حکمی صادر کرد. مثلاً $f(x)=x^{۳}+x+۱$، نه زوج است و نه فرد، ولی $f'(x)=۳x^{۲}+۱$ تابعی زوج است.

اما اگر f' فرد باشد، قطعاً f زوج است (البته به شرط آن‌که f در R مشتق‌پذیر باشد). زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)+f'(x)=\circ \\ g(x)=f(-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f'(-x)=-g'(x) \end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)-g'(x)=\circ\Rightarrow (f-g)'(x)=\circ$$

اگر مشتق یک تابع مشتق‌پذیر در R صفر باشد، آن تابع قطعاً یک تابع ثابت است. یعنی عدد ثابت $c\in R$ وجود دارد که:

$$f(x)-g(x)=c\Rightarrow f(-x)=f(x)-c$$

رابطه‌ی فوق برای هر $x\in R$ برقرار است، اگر قرار دهیم $x=\circ$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(\circ)=f(\circ)-c\Rightarrow c=\circ\Rightarrow f(-x)=f(x)\Rightarrow \text{زوج } f$$

۲- تناوب

نکته: **اگر تابع f متناوب باشد، آن‌گاه** f' **نیز متناوب است.**

درک شهودی نکته‌ی فوق بسیار واضح است. چون تابع f متناوب است، رفتار آن در فاصله‌های دوره ی تناوب آن عیناً تکرار می‌شود، پس از نظر خطوط مماس بر منحنی نیز عیناً رفتاری مشابه خواهد داشت و f' نیز متناوب می‌شود. برای اثبات دقیق‌تر فرض کنید T دوره‌ی تناوب f باشد، آن‌گاه : $f(x+T)=f(x)$ و از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$f'(x+T)\times(x+T)'=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)\times ۱=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$$

پس f' نیز متناوب است.

پرسش: آیا عکس این نکته نیز برقرار است؟ یعنی اگر f' **متناوب باشد،** f **نیز متناوب است؟**

پاسخ: خیر. مثلاً تابع $f(x)=x+\cos x$ تابعی متناوب نیست، ولی مشتق آن $f'(x)=۱-\sin x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است.

کاربردهایی از مشتق

بحث تابع مشتق و خواص آن به پایان رسیده است. در انتهای این بخش چند مسأله‌ی نمونه حل می‌کنیم درک شما را از مفهوم مشتق کامل‌تر می‌کنند و علاوه بر آن مسائلی جالب و زیبا هستند!

ابتدا از کاربرد مشتق در معادلات تابعی می‌گوییم. در ریاضیات عالی، بسیاری از توابع را پیش از آن که ضابطه‌ای صریح برای آن‌ها بیابند، با معادلات تابعی توصیف می‌کنند و بعضی از خواص آن‌ها را کشف می‌کنند. یکی از این خواص، طبیعتاً مشتق تابع است!

مسأله‌ی (۲۰): الف) تابع مشتق‌پذیر f برای تمام مقادیر حقیقی و مثبت x و y در معادله‌ی $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند.

ثابت کنید: $f'(x)=\frac{1}{x}f'(1)$

ب) تابع مشتق‌پذیر f برای تمام مقادیر حقیقی x و y در معادله‌ی $f(x+y)=f(x)f(y)$ صدق می‌کند. ثابت کنید: $f'(x)=f'(0).f(x)$

حل: الف) اگر در معادله‌ی تابعی قرار دهیم $x=y=1$، به‌دست می‌آوریم:

$$f(1)=2f(1)\Rightarrow f(1)=0$$

اکنون برای به‌دست آوردن مشتق تابع از تعریف آن استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

برای آن‌که حد فوق را بتوانیم ساده کنیم، و به نوعی از معادله‌ی تابعی استفاده کنیم، $x+h$ را به صورت ضرب دو عدد می‌نویسیم که $f(x+h)$ به معادله‌ی تابعی مربوط شود:

$$x+h=x(1+\frac{h}{x})\Rightarrow f(x+h)=f(x(1+\frac{h}{x}))=f(x)+f(1+\frac{h}{x})\Rightarrow f(x+h)-f(x)=f(1+\frac{h}{x})$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{h}\xrightarrow{f(1)=0}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{h}$$

$$t=\frac{h}{x}\to 0\Rightarrow f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{tx}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\frac{1}{x}f'(1)$$

یادداشت: نمونه‌ای از توابعی که در معادله‌ی قسمت (الف) صدق می‌کنند (که در ریاضیات به آن معادله‌ی دوم کوشی می‌گویند)، تابع $f(x)=\log x$ است.

ب) اگر در معادله‌ی تابعی قرار دهیم $x=y=0$، نتیجه می‌گیریم:

$$f(0)=(f(0))^2\Rightarrow f(0)=0 \text{ یا } f(0)=1$$

اگر $f(0)=0$، با قرار دادن $y=0$ در معادله‌ی تابع داریم: $f(x)=f(x)f(0)=0$، در نتیجه تابع f، یک تابع ثابت با مقدار صفر است که در حکم سؤال به وضوح صدق می‌کند. در حالت دیگر، یعنی $f(0)=1$، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-1)}{h}$$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)$$

یادداشت: نمونه‌ای از توابعی که در این معادله صدق می‌کنند (که به آن معادله‌ی سوم کوشی می‌گویند) ، توابع نمایی هستند، مثلاً $f(x)=2^x$.

با استفاده از مشتق می‌توان بعضی از اتحادها را نیز ثابت کرد:

مسأله‌ی (۲۱): با استفاده از اتحاد $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$، اتحاد مشابه برای $\cos(x+a)$ را ثابت کنید.

حل: از دو طرف اتحاد فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم. دقت کنید که a پارامتر است و با آن مثل یک عدد ثابت برخورد می‌کنیم.

$$g(x)=\sin(x+a)\Rightarrow g'(x)=\cos(x+a)\times 1=\cos(x+a)$$

$$g(x)=\sin x\cos a+\cos x\sin a\Rightarrow g'(x)=\cos x\cos a-\sin x\sin a$$

مقایسه‌ی دو تساوی فوق، اتحاد $\cos(x+a)=\cos x\cos a-\sin x\sin a$ را نتیجه می‌دهد.

○ **مسأله‌ی (۲۲):** ابتدا ثابت کنید: $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=1+x+x^{2}+\ldots+x^{n}$ و با استفاده از آن حاصل $1+2x+3x^{2}+\ldots+nx^{n-1}$ را به‌دست آورید.

حل: اثبات اتحاد اول که به راحتی با اتحاد چاق و لاغر انجام می‌شود. حال از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق بگیرید.

$$f(x)=1+x+x^{2}+\ldots+x^{n}\Rightarrow f'(x)=0+1+2x+3x^{2}+\ldots+nx^{n-1}$$

$$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(n+1)x^{n}(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^{2}}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(x-1)^{2}}$$

برابری دو تساوی بالا، پاسخ سؤال را حاصل می‌کند.

فرمول های مشتق گیری

در تمام فرمول های زیر w، r و u بر حسب x فرض شده اند.

تابع	مشتق	مثال
$y=a$	$y'=0$	$y=3\Rightarrow y'=0$
$y=ax$	$y'=a$	$y=7x\Rightarrow y'=7$
$y=ax^{n}$	$y'=a.nx^{n-1}$	$y=2x^{3}\Rightarrow y'=2\times3\times x^{2}$
$y=u\pm v\pm\ldots$	$y'=u'\pm v'\pm\ldots$	$y=3x^{2}-5x+7\Rightarrow y'=6x-5$
$y=u.v$	$y'=u'.v+v'.u$	$y=(3x^{4})(\sin x)\Rightarrow y'=(12x^{3})\sin x+(\cos x).3x^{4}$
$y=au$	$y'=au'$	$y=5\cos\Rightarrow y'=-5\sin x$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^{2}}$	$y=\frac{3x^{2}}{\tan x}\Rightarrow y'=\frac{6x(\tan x)-(1+\tan^{2}x)3x^{2}}{\tan^{2}x}$
$y=\frac{u}{a}$	$y'=\frac{u'}{a}$	$y=\frac{\cot x}{5}\Rightarrow y'=\frac{-(1+\cot^{2}x)}{5}$
$y=\frac{a}{u}$	$y'=\frac{-au'}{u^{2}}$	$y=\frac{3}{x^{5}}\Rightarrow y'=\frac{-3(5x^{4})}{x^{10}}=\frac{-15}{x^{6}}$
$y=\frac{au+b}{cu+d}$	$y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^{2}}u'$	$y=\frac{3x+5}{2x-7}\Rightarrow y'=\frac{21-10}{(2x-7)^{2}}=\frac{-31}{(2x-7)^{2}}$
$y=au^{m}$	$y'=m.a.u'.u^{m-1}$	$y=5(\sin^{2}x)\Rightarrow y'=4\times5\times\cos x\times\sin^{3}x$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sqrt[m]{n^{n}}$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y=\sqrt[5]{x^{3}}\Rightarrow y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^{2}}}$
$y=\lvert u\rvert$	$y'=\frac{u'.u}{\lvert u\rvert}$	$y=\lvert x^{2}+x\rvert\Rightarrow y'=\frac{(2x+1)(x^{2}+x)}{\lvert x^{2}+x\rvert}$
$y=a\sin u$	$y'=au'\cos u$	$y=-3\sin(2x^{3}+5)\Rightarrow y'=(-3)(6x^{2})\cos(2y^{3}+5)=-18x^{2}\cos(2x^{3}+5)$
$y=a\cos u$	$y'=-au'\sin u$	$y=3\cos(\sqrt{x})\Rightarrow y'=-(3)(\frac{1}{2\sqrt{x}}).\sin\sqrt{x}$
$y=a\tan u$	$y'=au'(1+\tan^{2}u)$	$y=3\tan(\cos)\Rightarrow y'=3(-\sin x)(1+\tan^{2}(\cos x))$
$y=a\cot u$	$y'=-au'(1+\cot^{2}u)$	$y=5\cot x\Rightarrow y'=-5(1+\cot^{2}x)$
$y=a\sin^{m}u$	$y'=mau'\cos u\sin^{m-1}u$	$y=2\sin^{3}(x^{5})\Rightarrow y'=(2\times3)(5x^{4})(\cos(x^{5}))\sin^{2}(x^{5})$
$y=a\cos^{m}u$	$y'=-mau'\sin u\cos^{m-1}u$	$y=5\cos^{4}(\sqrt{x})\Rightarrow y'=-(4)(5)(\frac{1}{2\sqrt{x}})(\sin\sqrt{x})(\cos^{3}\sqrt{x})$

$y = a\tan^m u$	$y = mau'(1+\tan^2 u)\tan^{m-1} u$	$y = 7\tan^5 x \Rightarrow y' = 7\times 5(1+\tan^2 x)\tan^4 x$
$y = a\cot^m u$	$y' = -mau'(1+\cot^2 u)\cot^{m-1} u$	$y = 2\cot^3 x \Rightarrow y' = -(3)(2)(1+\cot^2 x)\cot^2 u$
$y = a\sec u$	$y' = au'.\sin u.\sec^2 u$	$y = \sec x \Rightarrow y' = \sin.\sec^2 u$
$y = a\csc u$	$y' = -au'\cos u\csc^2 u$	$y = \csc(5x) \Rightarrow y' = -5\cos(5x)\csc^2(5x)$
$y = Arc\sin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = Arc\sin(3x) \Rightarrow y' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$
$y = Arc\cos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = Arc\cos(3x^2-5x) \Rightarrow y' = \frac{-(6x-5)}{\sqrt{1-(3x^2-5x)^2}}$
$y = Arc\tan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = Arc\tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = Arc\cot u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$	$y = Arc\cot(\sin x) \Rightarrow y' = \frac{-\cos x}{1+\sin^2 x}$
$y = a^u$	$y' = u'a^u Lna$	
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
$y = Lnu$	$y' = \frac{u'}{u}$	$Lne = 1$ ✓
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
$y = \tan x$	$y' = 1+\tan^2 x$	
$y = \cot x$	$y' = -(1+\cot^2 x)$	
$y = [u]$	$y' = \begin{cases} 0 & u \notin z \\ \phi & u \in z \end{cases}$	

تذکر: در نقطه ای که $u \in z$ و تابع u درآن نقطه مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه :

$$y = [u] \Rightarrow y' = 0$$

$$y = \left[\sin\frac{3\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin\frac{3\pi}{2} = -1 \in z} y' = 0$$

$$y = \left[\sin\frac{\pi}{3}\right] \xrightarrow{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin z} y' = 0$$

$$y = [\sin\pi] \xrightarrow{\sin\pi = 0 \in z} y' = \phi$$