جزوه درس

کنترل مدرن

راحیل زرگری نژاد - حمیدرضا یغموری

(ویرایش اول)

فهرست:

بخش اول:

یادآوری مبانی اصلی

درس کنترل مدرن

3 بخش اول: یادآوری مبانی اصلی درس کنترل مدرن

1-1- مقدمه

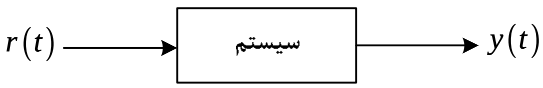
در درس کنترل خطی، تحلیل و طراحی سیستم‌های تک ورودی - تک خروجی[1] را با استفاده از تابع تبدیل[2] و روش‌های زمانی و فرکانسی مورد بررسی قرار گرفت. در این جزوه با استفاده از اصول درس کنترل مدرن، تحلیل و طراحی حوزه زمانی سیستم‌های کنترلی را با استفاده از مدل فضای حالت[3] بررسی می‌کنیم.

مدل‌سازی در فضای حالت که نظریه نوین کنترل نام گرفته است، به منظور برآوردن قیدهای سخت تر بر عملکرد سیستم‌های کنترل، افزایش پیچیدگی و سهولت دسترسی به کامپیوترها بکار گرفته شده است. مزیت عمده تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل مدرن نسبت به روش‌های کلاسیک، کاربرد آن در سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی[4] می‌باشد.

قبل از آنکه با مباحث اصلی درس آشنا شویم، مرور و مطالعه برخی موضوعات پیش‌نیاز درس لازم می‌باشد.

1-2- مروری بر اصطلاحات و تعاریف کنترلی:

1- **سیستم**: سیستم مجموعه‌ای از اجزایی است که باهم کار می‌کنند و هدف معینی را دنبال می‌کنند. سیستم تنها به نوع فیزیکی آن محدود نمی‌شود. مفهوم سیستم را در مورد پدیده‌های مجرد پویا نظیر اقتصاد نیز می‌توانیم بکار بریم.



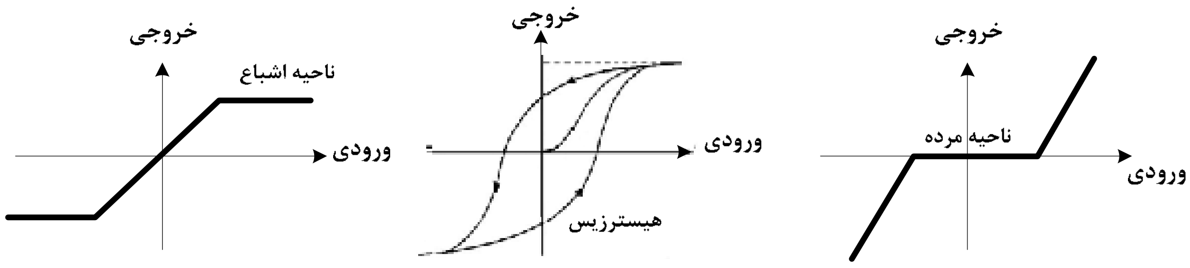
شکل 1-1: **یک سیستم با ورودی** $r(t)$ **و خروجی** $y(t)$

2- **سیستم‌های خطی/ غیرخطی**: سیستمی خطی[5] است که خاصیت جمع آثار در مورد آن صادق باشد، یعنی پاسخ ناشی از اعمال همزمان چندین ورودی (تحریک)، برابر جمع پاسخ‌های ناشی از تک‌تک این ورودی‌ها باشد. در غیراینصورت سیستم را غیرخطی[6] گویند.

از نظر ریاضی، این مشخصه سیستم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} r_1(t) \to y_1(t) \\ r_2(t) \to y_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \to y_n(t) \end{cases} \to a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t) + \cdots + a_n r_n(t) \to a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \cdots + a_n y_n(t) \qquad (1\text{-}1)$$

[1] Single Input – Single Output Systems (SISO Systems)
[2] Transfer Function
[3] State Space Model
[4] Multiple Input – Multiple Output Systems (MIMO Systems)
[5] Linear System
[6] Non-Linear Systems



شکل 1-2: چند نمونه از مشخصه ورودی - خروجی سیستم‌های غیرخطی

مثال 1-1

کدامیک از سیستم‌های زیر خطی می‌باشند:

1) $y(t)=e^{-5x(t)}$

برای بررسی خطی بودن رابطه ورودی خروجی یک سیستم، از رابطه 1-1 استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1(t)\to y_1(t)=e^{-5x_1(t)} \\ x_2(t)\to y_2(t)=e^{-5x_2(t)} \end{cases}$$

$$\to a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\to y(t)=e^{-5(a\,x_1(t)+b\,x_2(t))}\neq a\,y_1(t)+b\,y_2(t)=a\,e^{-5x_1(t)}+b\,e^{-5x_2(t)}$$

رابطه 1-1 برقرار نیست بنابراین سیستم خطی نیست.

2) $y(t)=\begin{cases} x(t) & 0\le t\le 1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1(t)\to y_1(t)=\begin{cases} x_1(t) & 0\le t\le 1 \\ 0 & t>1 \end{cases} \\ x_2(t)\to y_2(t)=\begin{cases} x_2(t) & 0\le t\le 1 \\ 0 & t>1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\to a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\to y(t)=\begin{cases} a\,x_1(t)+b\,x_2(t) & 0\le t\le 1 \\ 0 & t>1 \end{cases}=a\,y_1(t)+b\,y_2(t)$$

رابطه 1-1 برقرار است بنابراین سیستم خطی است.

3) $y(t)=\sin(2x(t))$

$$\begin{cases} x_1(t)\to y_1(t)=\sin(2x_1(t)) \\ x_2(t)\to y_2(t)=\sin(2x_2(t)) \end{cases}$$

$$\to a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\to y(t)=\sin\big(2(a\,x_1(t)+b\,x_2(t))\big)=\sin(2x_1(t))\cos(2x_2(t))+\sin(2x_2(t))\cos(2x_1(t))$$

$$\neq a\,y_1(t)+b\,y_2(t)=a\,\sin(2x_1(t))+b\,\sin(2x_2(t))$$

رابطه 1-1 برقرار نیست بنابراین سیستم خطی نیست.

4) $y(t)=4$

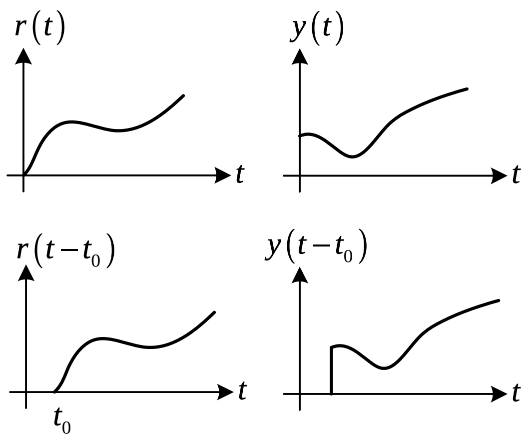
$$\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) = 4 \\ x_2(t) \to y_2(t) = 4 \end{cases}$$

$$\to a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \to y(t) = 4 \neq a\,y_1(t) + b\,y_2(t) = 4a + 4b$$

رابطه 1-1 برقرار نیست بنابراین سیستم خطی نیست.

<

3- **سیستم تغییرناپذیر/تغییرپذیر با زمان**: از نظر مفهومی، سیستم تغییرناپذیر با زمان[1] است اگر رفتار و مشخصه‌های سیستم در طی زمان ثابت باشند. اکثر سیستم‌هایی که در عمل با آن‌ها سر و کار داریم، سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان می‌باشند.



شکل 1-3: سیستم تغییرناپذیر با زمان

از نظر ریاضی، این مشخصه سیستم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & r(t) \xrightarrow{system} y(t) \\ & \to r(t-t_0) \xrightarrow{system} y(t-t_0) \end{aligned} \qquad (2\text{-}1)$$

به عنوان مثال یک مدار با عناصر ثابت مقاومت، سلف و خازن یک سیستم تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

اگر برای سیستمی رابطه 1-2 برقرار نباشد، سیستم را تغییرپذیر با زمان[2] گویند. به عنوان مثال سیستم یک موشک در حال سوخت یک سیستم تغییرپذیر با زمان می‌باشد زیرا سرعت موشک به جرم آن بستگی دارد که مدام در حال کاهش می‌باشد.

مثال 1-2

کدامیک از سیستم‌های زیر تغییرناپذیر با زمان می‌باشند:

1) $y(t) = e^{-5x(t)}$

برای بررسی تغییرناپذیر با زمان بودن رابطه ورودی خروجی یک سیستم، از رابطه 1-2 استفاده می‌کنیم:

---

[1] Time Invariant System
[2] Time Variant System

$$x_1(t) \to y_1(t) = e^{-5x_1(t)}$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = e^{-5x_2(t)} = e^{-5x_1(t-t_0)}$$
$$y_1(t-t_0) = e^{-5x_1(t-t_0)} = y_2(t)$$

رابطه 1-2 برقرار است بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

2) $y(t) = t\,x(t)$

$$x_1(t) \to y_1(t) = t\,x_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = t\,x_2(t) = t\,x_1(t-t_0)$$
$$y_1(t-t_0) = (t-t_0)\,x_1(t-t_0) \neq y_2(t)$$

رابطه 1-2 برقرار نیست بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان می‌باشد.

<

4- **سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان**: سیستمی که دو خصوصیت خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان را داشته باشد، سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) خوانده می‌شود.

مثال 1-3

نشان دهید که سیستم‌های زیر LTI می‌باشد.

$y(t) = 3x(t)$

برای بررسی خطی بودن رابطه ورودی خروجی یک سیستم، از رابطه 1-1 استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) = 3x_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) = 3x_2(t) \end{cases}$$
$$\to a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \to y(t) = 3\big(a\,x_1(t) + b\,x_2(t)\big) = 3a\,x_1(t) + 3b\,x_2(t)$$
$$= a\,3x_1(t) + b\,3x_2(t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$

رابطه 1-1 برقرار است بنابراین سیستم خطی است. برای بررسی تغییرناپذیر با زمان بودن رابطه ورودی خروجی یک سیستم، از رابطه 1-2 استفاده می‌کنیم:

$$x_1(t) \to y_1(t) = 3x_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = 3x_2(t) = 3x_1(t-t_0)$$
$$y_1(t-t_0) = 3x_1(t-t_0) = y_2(t)$$

رابطه 1-2 برقرار است بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان می‌باشد؛ بنابراین سیستم هم خطی و هم تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

<

5- **سیستم حافظه‌دار/بدون حافظه**: یک سیستم را بدون حافظه گویند، اگر خروجی آن به ازای هر مقدار از متغیر مستقل در یک زمان مفروض، فقط به ورودی در همان زمان بستگی داشته باشد. سیستمی که این خاصیت را نداشته باشد، سیستم حافظه‌دار

گویند. مفهوم حافظه در یک سیستم، متناظر با وجود مکانیزمی در سیستم است که اطلاعاتی را درباره مقادیر ورودی در زمان‌هایی بجز لحظه جاری، نگه داشته یا ذخیره می‌کند.

به طور مثال یک مدار مقاومتی خالص یک سیستم بدون حافظه است اما مدارهای شامل سلف و خازن حافظه‌دار محسوب می‌شوند.

6- **سیستم عِلّی/غیرعِلّی**: سیستمی را علی[1] گویند اگر خروجی در لحظه فقط به مقادیر ورودی در لحظه کنونی و گذشته بستگی داشته باشد. چنین سیستمی را اغلب غیر پیشگو گویند زیرا مقادیر آینده را پیش‌بینی نمی‌کند. تمامی سیستم‌های فیزیکی موجود سیستم‌های علی می‌باشند.

7- **سیستم پایدار/ناپایدار**: اگر خروجی (پاسخ) یک سیستم به یک ورودی کراندار (یعنی مقدار ورودی بدون حد افزایش نیابد) کراندار باشد، سیستم را پایدار می‌نامند. به بیان غیررسمی، سیستم پایدار سیستمی است که در آن ورودی‌های کوچک به خروجی‌هایی منجر می‌شوند که همگرا باشند.

8- **مدل ریاضی**: مدل ریاضی سیستم دینامیکی یک معادله ریاضی است که رفتار دینامیکی سیستم را دقیقاً یا حداقل به خوبی نمایش می‌دهد. مدل ریاضی یک سیستم یکتا نبوده و آن را می‌توان به روش‌های مختلف نمایش داد.

رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم ها را، اعم از سیستم مکانیکی، الکترونیکی، حرارتی، اقتصادی یا حتی زیست‌محیطی را می‌توان بر حسب معادلات دیفرانسیلی توصیف نمود. این معادلات را می‌توان با استفاده از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم، مثلاً قوانین نیوتن برای سیستم‌های مکانیکی و قوانین کیرشف برای سیستمهای الکتریکی به دست آورد.

یک سیستم فیزیکی را می‌توان به چهار روش، تابع تبدیل، معادلات حالت، معادلات دیفرانسیل و دیاگرام‌های بلوکی مدل‌سازی نمود.

9- **سیستم فشرده/گسترده**: بنا بر تعریف، سیستمی را فشرده[2] گویند که بعد بردار حالت آن متناهی باشد. سیستمی که بردار حالت نامتناهی داشته باشد را گسترده[3] نامند.

1-3- مروری بر مبانی جبر خطی:

1-3-1- فضاهای برداری:

1- **میدان**: یک میدان F از مجموعه‌ای از عناصر به نام اسکالرها به همراه دو عمل جمع و ضرب تشکیل شده است، بطوریکه شرایط زیر را برآورده سازند:

- برای هر دو اسکالر a و b در F، یک عنصر متناظر $a+b$ در F وجود داشته که مجموع a و b نامیده شده و همچنین یک عنصر ab در F که حاصل‌ضرب a و b نامیده می‌شود، وجود دارد.
- برای هر سه اسکالر a، b و g در F داریم:

$$1)\ \begin{cases} a+b=b+a \\ ab=ba \end{cases}$$

---

[1] Causal
[2] Lumped
[3] Distributed

2) $\begin{cases}(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\\(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)\end{cases}$

3) $\alpha(\beta+\gamma)=(\alpha\beta)+(\alpha\gamma)$

- F یک عنصر نشان داده‌شده با 0 و یک عنصر نشان داده‌شده با 1 دارد به گونه‌ای که به ازای هر اسکالر α در F داریم:

1) $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$

2) $\alpha.1=1.\alpha=\alpha$

- برای هر عنصر α در F یک عنصر β در F وجود دارد بطوریکه: $\alpha+\beta=0$
- برای هر عنصر $\alpha\neq 0$ در F یک عنصر γ در F وجود دارد بطوریکه: $\alpha\gamma=1$

به طور مثال مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با قواعد جمع و ضرب معمولی، میدان اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند و یا مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ با قواعد جمع و ضرب معمولی، میدان اعداد صحیح را تشکیل نمی‌دهند. (چرا؟)

2- **فضای برداری**: فضای برداری V به روی میدان F، مجموعه‌ای از بردارهاست که می‌توانند باهم جمع شده و در اسکالرهای میدان F ضرب گردند، به گونه‌ای که حاصل جمع بردارها و حاصل‌ضرب بردار در اسکالرها نیز عضو V بوده و شرایط زیر را برآورده سازند:

- برای بردارهای $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ عضو V داریم: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- یک عنصر V، نشان داده‌شده با $\vec{0}$ وجود دارد که برای هر عنصر $\vec{u}$ عضو V داشته باشیم: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- برای یک عنصر داده‌شده در V، یک عنصر $-\vec{u}$ در V به گونه‌ای وجود دارد که داشته باشیم:

$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

- برای کلیه بردارهای $\vec{u}$ در V داریم:

$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

$(\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u})$

- برای هر α در میدان F. بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در V داریم:

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

- برای هر $\vec{u}$ در V داریم: $1.\vec{u}=\vec{u}$

به طور مثال مجموعه بردارهای $\left\{\vec{v}=(1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n)\middle|\vec{v}_i\in\mathbb{R}\right\}$ بر روی میدان $\mathbb{R}$ یک فضای برداری را تشکیل نمی‌دهند. (چرا؟)

3- **زیر فضای برداری**: هر زیرمجموعه از فضای برداری V را یک زیر فضا از V به روی میدان F گویند، اگر تحت عملیات V یک فضا روی میدان F تشکیل دهد.

به طور مثال:

$\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^3...\subset\mathbb{R}^n$

✓ **قضیه**: اشتراک چند زیر فضا از فضای برداری V نیز زیر فضایی از فضای برداری V می‌باشد.

به طور مثال:

$$\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^3 \dots \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$$

1-3-2- ترکیب خطی و پایه فضای برداری:

1. **ترکیب خطی**: اگر بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ بردارهای متعلق به فضای برداری V و اسکالرهای $a_1,a_2,...,a_n$ متعلق به میدان F باشند، آنگاه بردار $\vec{v}$ را که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n \qquad (3\text{-}1)$$

ترکیب خطی از بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ نامند.

2. **اسپن**: اگر بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ متعلق به فضای برداری V بوده و هر بردار $\vec{v}\in V$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از بردارها $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ نمایش داد، آنگاه گوییم که این فضا توسط بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ اسپن[1] شده است:

$$V = span\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n\}$$

3. **استقلال و وابستگی خطی بردارها**: بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ متعلق به فضای برداری V را مستقل خطی گویند، اگر اسکالرهای $a_1,a_2,...,a_n$ متعلق به میدان F وجود داشته باشند، بطوریکه داشته باشیم:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

در غیراینصورت این بردارها را وابسته خطی گویند.

نکته: دترمینان ماتریس حاصل از کنار هم قراردادن n برداری n بعدی مستقل خطی، صفر است.

مثال 1-3

استقلال و وابستگی مجموعه بردارهای زیر را بررسی نمایید:

$$1)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$$

با استفاده از روش دترمینان داریم:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & 4\end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\times 1\times\begin{vmatrix}0 & 0\\2 & 4\end{vmatrix} = 0$$

بنابراین سه بردار وابسته خطی هستند.

---

[1] Span

$$2)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

برای این دسته بردار تعریف استقلال خطی را بررسی می‌کنیم:

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0\rightarrow\begin{pmatrix}a\\0\\2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}a+b\\0\\2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a+b=0\\2a=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=0\\a=0\end{cases}$$

بنابراین دو بردار مستقل خطی هستند.

<

4. **بردارهای پایه**: مجموعه بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ را پایه فضای برداری V نامند اگر دو شرط زیر برقرار باشد:
   1- بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ مستقل خطی باشند.
   2- داشته باشیم: $V=span\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n\}$

- **قضیه**: هر بردار $\vec{v}\in V$ را می‌توان به صورت منحصر بفردی بر حسب بردارهای پایه نمایش داد.
- **قضیه**: بعد یک فضای برداری با تعداد اعضای مجموعه بردارهای پایه آن برابر است.
- **قضیه**: اگر بعد فضایی n باشد، هر مجموعه n عضوی مستقل خطی پایه‌ای برای آن فضا می‌باشد.
- **قضیه**: اگر بعد فضایی n باشد، هر مجموعه m عضوی بطوریکه $m<n$ نمی‌تواند پایه‌ای برای آن فضا می‌باشد.

مثال 1-4

آیا بردارهای زیر می‌توانند پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ باشند؟

$$1)\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

بعد فضا سه است. اگر این سه بردار مستقل خطی باشند، حتماً پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ خواهند بود. با استفاده از روش دترمینان داریم:

$$\begin{vmatrix}3&1&1\\0&0&0\\-3&0&-1\end{vmatrix}=0$$

سه بردار وابسته خطی هستند و نمی‌توانند پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ باشند.

$$2)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

تعداد بردارهای این مجموعه از بعد فضا (سه) کمتر است، بنابراین پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ نیستند.

$$3)\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

بعد فضا سه است. اگر این سه بردار مستقل خطی باشند، حتماً پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ خواهند بود. با استفاده از روش دترمینان داریم:

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&4\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\times 2\times\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

سه بردار مستقل خطی هستند، بنابراین می‌توانند پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ باشند.

<

5. **پایه یکه**: مجموعه بردارهای $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ را پایه یکه[1] فضای برداری V نامند، اگر نرم هر یک از بردارها برابر یک باشد.

- **قضیه**: مجموعه پایه یکه برای فضای برداری یک مجموعه یکتاست.

نکته: برای تبدیل مجموعه بردارهای پایه به مجموعه پایه یکه از روش $\vec{e}_i=\dfrac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}$ استفاده می‌کنیم

مثال 1-5

مجموعه پایه زیر را به پایه یکه تبدیل نمایید:

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+0+0}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2=\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{0+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3=\frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{0+4^2+1^2}}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{\sqrt{17}}\\\frac{1}{\sqrt{17}}\end{pmatrix}$$

<

---

[1] Normal

6. **پایه متعامد**: بردارهای $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$ را پایه متعامد[1] فضای برداری V نامند، اگر دو به دو بر هم عمود باشند.

7. **پایه یکه متعامد**: اگر مجموعه بردارهای پایه، متعامد و یکه باشند، پایه را یکه متعامد[2] گویند.

نکته: برای تبدیل مجموعه بردارهای پایه $\vec{v}_1,\vec{v}_2,....,\vec{v}_n$، به مجموعه پایه یکه متعامد $\vec{q}_1,\vec{q}_2,....,\vec{q}_n$ از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \vec{u}_1=\vec{v}_1 & \vec{q}_1=\dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \\ \vec{u}_2=\vec{v}_2-\left(\vec{q}_1^T\vec{v}_2\right)\vec{q}_1 & \vec{q}_2=\dfrac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \\ \vdots & \vdots \\ \vec{u}_n=\vec{v}_m-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\vec{q}_i^T\vec{v}_m\right)\vec{q}_k & \vec{q}_n=\dfrac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|} \end{cases}$$

مثال 6-1

مجموعه پایه زیر را به پایه یکه متعامد تبدیل نمایید:

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{q}_1=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+0+0}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2=\vec{v}_2-\left(\vec{q}_1^T\vec{v}_2\right)\vec{q}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{=0}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_2=\frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{0+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0.71\\0.71\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3=\vec{v}_3-\left(\vec{q}_2^T\vec{v}_3\right)\vec{q}_2=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}-\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0&0.71&0.71\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}}_{=3.5}\right)\begin{pmatrix}0\\0.71\\0.71\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2.5\\2.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1.5\\-1.5\end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_3=\frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{0+(1.5)^2+(-1.5)^2}}\begin{pmatrix}0\\1.5\\-1.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0.33\\-0.33\end{pmatrix}$$

<

[1] Orthogonal
[2] Orthonormal

1-3-3- دستگاه‌های معادلات خطی:

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4-1}$$

که در آن a_{ij}، b_i و x_i عناصر میدان F فرض شده‌اند. این معادلات را می‌توان به فرم ماتریسی

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{5-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}_{m\times 1}}$$

نیز مرتب نمود. به تعاریف زیر توجه کنید:

1- **فضای گستره**: فضایی شامل تمام ترکیبات خطی ستون‌های ماتریس A را فضای گستره[1] ماتریس A می‌نامند.

2- **رتبه یک ماتریس**: بعد فضای گستره ماتریس A که برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی سطر یا ستون‌های ماتریس A می‌باشد را رتبه[2] ماتریس A می‌نامند و آن را با $rank(A)$ نمایش می‌دهند.

3- **فضای پوچی**: فضایی شامل تمام جواب‌های ممکن معادله $A\vec{x} = \vec{0}$ را فضای پوچی[3] ماتریس A نامند.

4- **پوچی**: بعد فضای پوچی ماتریس A را پوچی[4] ماتریس A نامند و آن را با $nullity(A)$ نمایش می‌دهند.

نکته: برای هر ماتریس A داریم:

$$rank(A) \le \min(m,n)$$

نکته: رابطه بین $rank(A)$ و $nullity(A)$ با تعداد ستون‌هایی برابر n به صورت زیر است:

$$nullity(A) = n - rank(A)$$

نکته: اگر دترمینان ماتریسی مخالف صفر باشد، ماتریس دارای $rank(A) = n$ بوده و آن را ماتریسی با رتبه کامل گویند.

نکته: برای تعیین $rank(A)$ ماتریسی که رتبه کامل ندارد (دارای نقص رتبه است) ابتدا با عملیات سطری مقدماتی، ماتریس را به فرم پلکانی الحاقی کاهش‌یافته تبدیل می‌کنیم.

مثال 1-7

برای ماتریس‌های زیر $rank(A)$ و $nullity(A)$ را مشخص نمایید:

---

[1] Range Space
[2] Rank
[3] Null Space
[4] Nullity

$$1)\ A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 8\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

برای تعیین $rank(A)$ ابتدا دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}5 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 8\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\times 1\times\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & 8\end{vmatrix}=16\neq 0$$

$$\rightarrow\begin{cases}rank(A)=3\\ nullity(A)=3-3=0\end{cases}$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

تعداد سطر و ستون این ماتریس باهم برابر نیست بنابراین ماتریس نمی‌تواند رتبه کامل باشد. (دترمینان قطعاً صفر است.) بنابراین هم ارز پلکانی الحاقی کاهش‌یافته[1] آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{-0.5R_3+R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{-0.5R_3+R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{-2R_2+R_1\leftrightarrow R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}rank(A)=2\\ nullity(A)=4-2=2\end{cases}$$

<

1-3-4- بردارهای ویژه و مقادیر ویژه:

دستگاه معادلات 1-4 را با شرط مربعی بودن ماتریس ضرایب یعنی $A_{n\times n}$ در نظر بگیرید.

---

[1] ماتریس A یک ماتریس پلکانی است اگر تعداد صفرهای شروع هر سطر آن نسبت به سطر قبل بیشتر باشد. مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

ماتریس A یک ماتریس پلکانی کاهش یافته است اگر اولیه درایه بعد از هر صفر در شروع سطر عدد یک باشد. مثال:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3 & 4\\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0\end{pmatrix}$$

ماتریس A یک ماتریس پلکانی الحاقی کاهش یافته است اگر دیگر درایه های ستون شامل اولین عدد یک در شروع سطر همگی صفر باشند. مثال:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 0 & 7\\ 0 & \boxed{1} & 0 & -6\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به صورت نگاشتی در فضای $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفت که هر بردار $\vec{x}$ را به بردار $\vec{b}$ تبدیل می‌کند. (می‌نگارد)

اگر $\vec{x}$ تحت نگاشت A صرفاً تغییر اندازه‌ای به طول l داشته باشد، (یعنی تحت نگاشت A تنها اندازه‌اش تغییر کند)، داریم:

$$A\vec{x} = l\,\vec{x} \qquad (6\text{-}1)$$

بنابراین:

$$A\vec{x} - l\,\vec{x} = \vec{0} \rightarrow (A - l\,I)\vec{x} = \vec{0} \rightarrow \vec{x} \in Null\ Space(A - l\,I)$$

خواهد بود. l_i را مقادیر ویژه[1] ماتریس A و $\vec{x}_i$ ها را بردار ویژه[2] متناظر با مقدار ویژه l_i گویند.

مقادیر ویژه یک ماتریس از رابطه

$$\Delta(A) = |l\,I - A| = 0 \qquad (7\text{-}1)$$

به دست می‌آیند که در آن $\Delta(A)$ معادله مشخصه ماتریس[3] A نامیده می‌شود.

مثال 1-8

مقادیر ویژه ماتریس زیر را مشخص نمایید:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با استفاده از رابطه 1-6 داریم:

$$\Delta(A) = |l\,I - A| = \left| l\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} l-5 & -2 & 0 \\ -1 & l+1 & -1 \\ -1 & 0 & l \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+1}(l-5)}_{1} \begin{vmatrix} l+1 & -1 \\ 0 & l \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{1+2}(-2)}_{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & l \end{vmatrix} = (l-5)\big(l(l+1) - 0\big) + 2(-l-1)$$

$$= (l-5)(l^2 + l) - 2l - 2 = l^3 + l^2 - 5l^2 - 5l - 2l - 2 = l^3 - 4l^2 - 7l - 2 = 0$$

$$\begin{cases} l_1 = 5.37 \\ l_2 = -1 \\ l_3 = -0.37 \end{cases}$$

<

برای محاسبه بردارهای ویژه، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر ماتریس دارای مقادیر ویژه تکراری نباشد، با استفاده از رابطه 1-6 بردارهای ویژه را به دست می‌آوریم.

---

[1] Eigen Value
[2] Eigen Vector
[3] Characteristic Equation

ب) اگر ماتریسی دارای مقدار ویژه تکراری l_1 از درجه تکرار k باشد، این ماتریس حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با l_1 خواهد داشت. بردارهای ویژه مستقل خطی یعنی $\overset{\mathbf{v}}{v}_i$ها از رابطه 1-6 به دست می‌آید. a تعداد بردار ویژه مستقل خطی متناظر با l_1 تکراری از مرتبه k از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a = k - rank\left(l_1 I - A\right) \qquad (8\text{-}1)$$

مثال 1-9

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را مشخص نمایید:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&12\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

برای محاسبه مقادیر ویژه با استفاده از رابطه 1-7 داریم:

$$\Delta(A)=\left|l I - A\right|=\left|l\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&12\\0&1&-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}l&0&0\\0&l&0\\0&0&l\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&12\\0&1&-1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}l-1&0&0\\0&l+2&-12\\0&-1&l+1\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}(l-1)\begin{vmatrix}l+2&-12\\-1&l+1\end{vmatrix}=(l-1)\left((l+2)(l+1)-12\right)=(l-1)\left(l^2+3l+2-12\right)$$

$$=(l-1)\left(l^2+3l-10\right)=(l-1)(l+5)(l-2)$$

$$\begin{cases}l_1=-5\\l_2=1\\l_3=2\end{cases}$$

مقادیر ویژه غیرتکراری است، بنابراین برای محاسبه بردارهای ویژه با استفاده از رابطه 1-6 داریم:

$$l_1=-5\rightarrow A\overset{\mathbf{v}}{x}_1=-3\overset{\mathbf{v}}{x}_1\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&12\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=-5x_1\\-2x_2+12x_3=-5x_2\\x_2-x_3=-5x_3\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=-5x_1\\x_2=-4x_3\\x_2=-4x_3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-4\\x_3=1\end{cases}\rightarrow\overset{\mathbf{v}}{x}_1=\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$$l_2=1\rightarrow A\overset{\mathbf{v}}{x}_2=\overset{\mathbf{v}}{x}_2\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&12\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=x_1\\-2x_2+12x_3=x_2\\x_2-x_3=x_3\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=x_1\\4x_2=x_3\\x_2=2x_3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}\rightarrow\overset{\mathbf{v}}{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \rightarrow A\vec{x}_2 = -3\vec{x}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ -2x_2 + 12x_3 = 2x_2 \\ x_2 - x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \rightarrow \vec{x}_2 = \\ x_3 = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

برای محاسبه مقادیر ویژه با استفاده از رابطه 1-7 داریم:

$$\Delta(A) = \left|\lambda I - A\right| = \left|\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -0.5 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^{3+1}}_{1}(-0.5)\begin{vmatrix} -1 & \lambda - 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+3}}_{1}(\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (-0.5)(-2 + 2\lambda - 2) + (\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1)$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 1 \rightarrow k = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

مقادیر ویژه تکراری است، بنابراین برای محاسبه بردارهای ویژه با استفاده از رابطه 1-8 داریم:

$$\alpha = 3 - rank(1I - A)$$

$$(1I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rank(1I - A) = 1$$

$$\rightarrow \alpha = 3 - 1 = 2$$

بنابراین دو بردار ویژه مستقل متناظر با مقدار ویژه تکراری $\lambda = 1$ داریم که از رابطه 1-6 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_{1,2} = 1 \rightarrow A\vec{v}_1 = \vec{v}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_2 + 0.5v_3 = v_1 \\ v_2 = v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 = v_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_2 = 0 \rightarrow 2v_1 = v_3 \rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 0 \rightarrow \vec{v}_1 = \\ v_3 = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow v_1 = 0 \rightarrow 2v_2 = -v_3 \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -1 \rightarrow \vec{v}_2 = \\ v_3 = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

برای محاسبه بردار ویژه متناظر با $\lambda_3 = -1$ با استفاده از رابطه 1-6 داریم:

$$l_3=3\to A\vec{x}_3=\vec{x}_3\to\begin{pmatrix}0&1&0.5\\0&1&0\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_2+0.5x_3=-x_1\\x_2=-x_2\\2x_1-2x_2=-x_3\end{cases}$$

$$\to x_2=0\to\{2x_1=-x_3\to\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=-2\end{cases}\to\vec{x}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

3) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

برای محاسبه مقادیر ویژه با استفاده از رابطه 1-7 داریم:

$$\Delta(A)=|l I-A|=\left|l\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}l&0&0\\0&l&0\\0&0&l\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}l&-1&0\\1&l-2&0\\-1&0&l-1\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{(-1)^{3+3}}_{1}(l-1)\begin{vmatrix}l&-1\\1&l-2\end{vmatrix}=(l-1)(l(l-2)+1)=(l-1)(l^2-2l+1)=(l-1)^3$$

$l_{1,2,3}=1\to k=3$

مقادیر ویژه تکراری است، بنابراین برای محاسبه بردارهای ویژه با استفاده از رابطه 1-8 داریم:

$$a=3-rank(1I-A)$$

$$(1I-A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\to rank(1I-A)=2$$

$\to a=3-2=1$

بنابراین یک بردار ویژه مستقل متناظر با مقدار ویژه تکراری $l=1$ داریم که از رابطه 1-6 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$l_{1,2,3}=1\to A\vec{v}_1=\vec{v}_1\to\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\to\begin{cases}v_2=v_1\\-v_1+2v_2=v_2\\v_1+v_3=v_3\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}v_1=v_2\\v_1+v_3=v_3\end{cases}\to\begin{cases}v_1=0\\v_2=0\\v_3=1\end{cases}\to\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

<

1-3-5- قطری سازی ماتریس‌های مربعی:

یکی از کاربردهای مهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس‌های مربعی است. برای تبدیل یک ماتریس به فرم قطری معادل از رابطه همانندی زیر استفاده می‌شود:

$$\Lambda=T^{-1}AT \qquad (9\text{-}1)$$

که در آن T ماتریس تبدیل می‌باشد.

الف) ماتریس تبدیل برای قطری سازی ماتریسی که n مقدار ویژه متمایز داشته باشد:

اگر مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ متمایز باشند؛ آنگاه دقیقاً n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد که می‌توان با استفاده از آن ماتریس تبدیل T را به دست آورد. اگر $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ بردارهای ویژه مستقل خطی برای ماتریس $A_{n\times n}$ باشند، ماتریس تبدیل T به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T=[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n] \tag{10-1}$$

به این ماتریس تبدیل که ماتریس $A_{n\times n}$ را به فرم قطری

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{11-1}$$

تبدیل می‌کند، ماتریس مدال[1] گویند.

نکته: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ به صورت رابطه 1-14 قطری سازی شده باشد،

1- برای هر مقدار صحیح و مثبت k داریم: $A^k=T\Lambda^kT^{-1}$

2- اگر کلیه عناصر قطری Λ باشند، در این صورت $A_{n\times n}$ معکوس پذیر بوده و داریم: $A^{-1}=T\Lambda^{-1}T^{-1}$

مثال 1-10

فرم قطری و ماتریس تبدیل ماتریس زیر را محاسبه نمایید:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از مثال 1-9 داریم:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-5 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$$

$$\lambda_1=-5 \rightarrow \vec{x}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2=1 \rightarrow \vec{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3=2 \rightarrow \vec{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریس مدال T که ماتریس A را به فرم قطری Λ تبدیل می‌کند برابر بوده

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -0.1429 & 0.4286 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1429 & 0.5714 \end{pmatrix}$$

و با اعمال تبدیل 1-9 داریم:

[1] Modal Matrix

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & -0.1429 & 0.4286 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1429 & 0.5714 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

به کد زیر توجه کنید:

```
>> T=[0 1 0;-4 0 3;1 0 1]
T =
 0 1 0
 -4 0 3
 1 0 1
>> A=[1 0 0;0 -2 12;0 1 -1]
A =
 1 0 0
 0 -2 12
 0 1 -1
>> T^-1*A*T
ans =
 -5. 0000 0 -0. 0000
 0 1. 0000 0
 0 0 2. 0000
 <
```

ب) ماتریس تبدیل برای قطری سازی ماتریسی که مقدار ویژه تکراری داشته باشد:

اگر ماتریسی مقادیر ویژه تکراری داشته باشد ممکن است که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی نداشته باشد، لذا در این صورت نمی‌توان آن را با ماتریس تبدیل 1-10 قطری نمود و برای کمبود بردارهای ویژه باید جایگزینی مناسب به دست آورد.

فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه مکرر مرتبه k مانند λ_1 و تعدادی مقدار ویژه متمایز و متفاوت از λ_1 به صورت $\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n$ داشته باشد. در این صورت ماتریس $A_{n\times n}$ حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه تکراری λ_1 خواهد داشت. اگر $a = n - rank\left(\lambda_1 I - A\right)$ باشد، تعداد a بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه مکرر وجود دارد و باید $k-a$ بردار دیگر محاسبه شوند. این بردارهای اضافی $\vec{f}_i$ که بردارهای ویژه تعمیم‌یافته[1] نام دارند از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A\vec{f}_i &= \lambda_i \vec{f}_i + \vec{v}_i \\ A\vec{f}_j &= \lambda_i \vec{f}_j + \vec{f}_i \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (12\text{-}1)$$

در هنگام چینش بردارهای ویژه تعمیم‌یافته، باید دقت کرد که آن‌ها به ترتیب پس از بردار ویژه مربوطه قرار گیرند. با رعایت این نکته ماتریس قطری فرم بلوکی زیر را خواهد داشت:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & J_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_{k+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad (13\text{-}1)$$

[1] Generalized Eigen Vector

که به آن فرم کانونیکال جردن[1] گویند. در این فرم J_i بلوک جردن معادل مقدار ویژه تکراری l_i با درجه تکرار m است:

$$J_i=\begin{pmatrix} l_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & l_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & l_i \end{pmatrix}_{m\times m} \qquad (14\text{-}1)$$

خواص بلوک‌های جردن به شرح زیر است:

1- کلیه عناصر روی قطر اصلی ماتریس مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

2- کلیه عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند.

3- عناصر بالای قطر اصلی یک یا صفر هستند.

4- تعداد بلوک‌های جردن متناظر با یک مقدار ویژه داده‌شده مثل l_i ، برابر با تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با آن مقدار ویژه است.

مثال 1-11

فرم قطری و ماتریس تبدیل ماتریس‌های زیر را محاسبه نمایید:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از مثال 1-9 داریم:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} l_{1,2}=1 \to k=2 \\ l_3=-1 \end{cases}$$

$$a=3-1=2$$

$$l_{1,2}=1 \to \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

همچنین:

$$l_3=3 \to \vec{x}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریس مدال T که ماتریس A را به فرم قطری Λ تبدیل می‌کند برابر بوده

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to T^{-1}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.25 \end{pmatrix}$$

و با اعمال تبدیل 1-9 داریم:

[1] Jordan Canonical Form

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

به کد زیر توجه کنید:

```
>> A=[1 0 0;0 -2 12;0 1 -1]
A =
 1 0 0
 0 -2 12
 0 1 -1
>> T=[0 1 0;-4 0 3;1 0 1]
T =
 0 1 0
 -4 0 3
 1 0 1
>> T^-1*A*T
ans =
 -5. 0000 0 -0. 0000
 0 1. 0000 0
 0 0 2. 0000
```

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

با استفاده از مثال 1-9 داریم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to l_{1,2,3} = 1 \to k = 3$$

$$a = 3 - 2 = 1$$

$$l_{1,2,3} = 1 \to \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و 2 بردار ویژه تعمیم‌یافته برای آن باید محاسبه گردد. با استفاده از رابطه 1-12 داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} f_2 = f_1 \\ -f_1 + 2f_2 = f_2 \\ f_1 + f_3 = f_3 + 1 \end{cases} \to \begin{cases} f_2 = f_1 \\ f_1 = 1 \end{cases}$$

$$\to \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} f_2 = f_1 + 1 \\ -f_1 + 2f_2 = f_2 + 1 \\ f_1 + f_3 = f_3 \end{cases} \to \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 1 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریس مدال T که ماتریس A را به فرم قطری Λ تبدیل می‌کند برابر بوده

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و با اعمال تبدیل 1-9 داریم:

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

به کد زیر توجه کنید:

```
>> T=[0 1 0;0 1 1;1 0 0]
T =
 0 1 0
 0 1 1
 1 0 0
>> A=[0 1 0;-1 2 0;1 0 1]
A =
 0 1 0
 -1 2 0
 1 0 1
>> T^-1*A*T
ans =
 1 1 0
 0 1 1
 0 0 1
 <
```

بخش دوم :

مقدمه ای بر کنترل مدرن

3 بخش دوم: مقدمه‌ای بر کنترل مدرن

2-1- مقدمه:

در بسیاری از موارد اگر بخواهیم کمیتی فیزیکی را نزدیک به مقدار مطلوبی نگه‌داریم، نیاز به سیستم کنترل خودکار خواهیم داشت. اگر مقدار مطلوب ثابت باشد، هدف سیستم کنترل، تنظیم[1] نامیده می‌شود و اگر این مقدار مطلوب با زمان تغییر کند، این هدف کنترلی را تعقیب[2] می‌نامیم. به عنوان مثال کنترل دور هارددیسک کامپیوتر، میزان رطوبت موجود در مخلوط خمیر کاغذ در صنایع کاغذسازی و یا غلظت مواد خروجی از یک رآکتور شیمیایی، مثال‌های صنعتی از سیستم‌های کنترلی می‌باشند. از طرف دیگر حرکت بازوی یک ربات برای طی مسیر مشخصی در فضا به منظور جوشکاری، کنترل پرواز هواپیما یا موشک در مسیر مورد نظر و یا تعقیب هدف متحرک توسط رادار یا تلسکوپ مثال‌هایی از سیستم‌های کنترل تعقیب یا سیستم‌های سرو می‌باشد.

چهار دلیل عمده استفاده از سیستم‌های کنترل را می‌توان عملکرد، مسائل اقتصادی و سودآوری تولید، امنیت کاربر و قابلیت اطمینان نام برد. بسیاری از سیستم ها به عملکرد مناسب نخواهند رسید مگر از سیستم کنترل مناسب در آن‌ها استفاده گردد. دقت عملکرد یک ربات توسط سیستم کنترل آن تأمین‌شده، در کلیه فرآیندهای تولیدی، نیروگاه‌ها و پالایشگاه‌ها، سیستم‌های کنترل، کیفیت مناسب محصولات را ایجاد می‌کنند.

مسائل اقتصادی و بهره وری مناسب نیز دلیل عمده دیگر استفاده از سیستم‌های کنترل در صنعت می‌باشد. این امر به خصوص در فرآیندهای تولیدی بسیار حائز اهمیت است. سرعت تولید به همراه رسیدن به کیفیت مناسب و ضایعات حداقل، عوامل بسیار مهم اقتصادی است که توسط سیستم‌های اتوماسیون و کنترل قابل‌دسترسی است. امنیت کاربر نیز دلیل دیگر استفاده از سیستمهای کنترل می‌باشد. هواپیما تنها توسط سیستم‌های کنترل و امنیتی دقیق، قادر به فرود در حداقل دید می‌باشد.

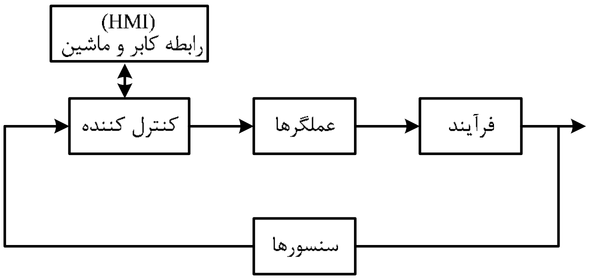
یک نیروگاه هسته‌ای تنها در صورت وجود سیستم‌های کنترل و امنیتی دقیق قادر به تولید انرژی به صورت کاملاً ایمن خواهد بود. مساله آخر که در اینجا می‌توان به آن اشاره نمود، درجه اطمینان بیشتر در محصولات تولیدی است که توسط سیستم‌های کنترل تنظیم می‌شوند. سیستم‌های کنترل، تغییرات سریع کمیت‌های فیزیکی در سیستم‌های کنترل شده را به حداقل می‌رسانند، موضوعی که به صورت طبیعی باعث افزایش قابلیت اطمینان سیستم می‌شود.

2-2- عناصر فیزیکی سیستم‌های کنترل:

شکل زیر عناصر فیزیکی یک سیستم کنترل را به صورت عمومی نشان می‌دهد. فرآیند، به سیستمی که تحت کنترل قرارگرفته اطلاق می‌شود. در این صورت یک هواپیما نیز می‌تواند فرآیند تحت کنترل نامیده شود. فرآیند دارای متغیرهای خروجی می‌باشد که برخی از آن‌ها تحت کنترل قرار دارند. این کمیت‌ها توسط سنسورها[3] اندازه‌گیری می‌شوند. یک سنسور معمولاً یک

---
[1] Regulation
[2] Tracking
[3] Sensor

مبدل[1] می‌باشد که توسط آن کمیت فیزیکی مورد نظر به صورت تناسبی به کمیت فیزیکی دیگری (معمولاً الکتریکی) تبدیل می‌شود. تاکومتر، شتاب سنج، ترموکوپل، استرین گیج و اندازه گیر PH از جمله‌این مبدل‌ها می‌باشند.



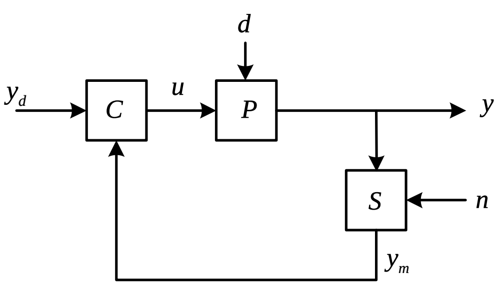
شکل 2-1: بلوک دیاگرام کنترلی

همچنین یک فرآیند دارای متغیرهای ورودی می‌باشد که در واقع با تأثیرگذاری بر روی فرآیند، کمیت خروجی را تغییر می‌دهند. عناصری که متغیرهای ورودی را ایجاد می‌کنند، عملگرها[2] نامیده می‌شوند. عملگرهای هیدرولیکی، نیوماتیکی، انواع موتورهای الکتریکی، منابع ولتاژ متغیر و شیرهای کنترلی از جمله عملگرهای متداول صنعتی می‌باشند.

کنترل‌کننده وظیفه اجرای راهبُرد کنترل را بر روی فرآیند بر عهده داشته و این عمل را از طریق عملگرها و با دریافت اطلاعات سنسورها انجام می‌دهد. کنترل‌کننده‌ها می‌توانند آنالوگ و به صورت نیوماتیکی، الکتریکی و یا الکترونیکی بوده و یا به صورت دیجیتال و توسط کامپیوتر و پردازشگرهای عددی پیاده‌سازی شوند که در این حالت توسط مبدل‌های A/D و D/A به فرآیند متصل می‌شوند. رابط کاربرد و ماشین در واقع پنجره‌ای است که به فرآیند متصل می‌شوند. رابط کاربر و ماشین در واقع پنجره‌ای است که فرآیند مورد نظر را مانیتور کرده و اجزای تنظیم‌کننده‌های کنترل کننده‌ها و همچنین کمیات مورد نظر فرآیند را که عملکرد سیستم را مشخص می‌نمایند، در اختیار کاربر قرار می‌دهد. در این واحد، اطلاعات سنسورها و عملگرها مانیتور شده و کمیت‌های مهم و قابل تنظیم کنترل‌کننده‌ها جهت استفاده و تنظیم کاربر در اختیار او قرار می‌گیرد. انواع نشانگرها[3] در این قسمت قرار می‌گیرند. این نشانگرها، می‌توانند شامل مانیتورهای مختلف کامپیوتری باشند که توسط نرم‌افزار، ارتباط لازم با سیستم را ایجاد می‌کند.

2-3- عناصر مفهومی سیستم‌های کنترل:

شکل زیر نمایش مفهومی سیستم‌های کنترل می‌باشد:



شکل 2-2: نمایش مفهومی سیستم‌های کنترل

[1] Transducer
[2] Actuators
[3] Gauges

در این نمایش P نمایش دهند فرآیند است که توسط مدل ریاضی آن تعیین می‌شود. خروجی فرآیند y ورودی‌های آن d و u می‌باشند که کلیه این کمیت‌ها به صورت برداری در نظر گرفته می‌شوند. u ورودی کنترل و d ورودی اغتشاش فرآیند نامیده می‌شود. سنسورها نیز با نماد ریاضی S نشان داده‌شده است که در اثر اندازه‌گیری متغیرهای خروجی فرآیند y تحت نویز اندازه‌گیری n، مقدار اندازه‌گیری شده y_m را تولید می‌کند. کنترل‌کننده را با C نمایش داده‌ایم که با استفاده از اطلاعات خروجی‌های اندازه‌گیری شده y_m و راهبُرد کنترل از پیش تعیین‌شده، فرمان کنترل u را توسط عملگرها ایجاد می‌کند. در این نمایش عملگرها جزئی از فرآیند دیده شده‌اند.

2-4- فرآیند طراحی کنترل‌کننده:

هدف از طراحی کنترل‌کننده این است که علیرغم وجود اغتشاشات d، نویز اندازه‌گیری n،عدم دقت در مدل‌سازی y_m و محدودیت‌های عملگرها و سنسورها حتی‌المقدور خروجی سیستم $y(t)$ نزدیک به مقدار مطلوب $y_d(t)$ باقی بماند. طراحی کنترل‌کننده به معنای ایجاد رابطه ریاضی مناسب با راهبُرد منطقی مناسب C برای رسیدن به هدف فوق است. المان مهم فیدبک یعنی در دسترس داشتن اطلاعات خروجی y_m برای تولید فرآیند کنترلی u ضروری است. می‌توان نشان داده که با وجود فیدبک می‌توان هدف کنترلی فوق را علیرغم محدودیت‌ها و خواست‌های چندوجهی، به دست آورد. به منظور طراحی کنترل‌کننده مناسب مراحل زیر باید محقق گردد:

- مدل‌سازی فرآیند
- مشخص نمودن مشخصات فیزیکی y_d و w در حوزه زمان یا فرکانس
- مشخص نمودن معیار یا معیارهای عملکرد $(y_d(t)\ ;\ y(t))$
- مدل‌سازی ریاضی عملگرها، سنسورها، مبدل‌ها و مشخصات فیزیکی نویز اندازه‌گیری
- مشخص نمودن فرم عمومی کنترل‌کننده به عنوان مثال PID یا فیدبک حالت و یا...

در این حالت مرحله طراحی کنترل‌کننده بدین صورت تعقیب می‌شود که با استفاده از تئوری کنترل کلاسیک یا مدرن ضرایب کنترل‌کننده (PID) یا بهره حلقه فیدبک حالت تعیین می‌گردد.
پس از طراحی کنترل‌کننده نحوه پیاده‌سازی آن توسط کنترل‌کننده‌های آنالوگ یا دیجیتال می‌بایست بررسی‌شده و رابطه کاربرد HMI[1] لازم باید طراحی و اجرا گردند. همچنین انتخاب مناسب سنسورها و عملگرهای مناسب برای سیستم ضروری است. پل واسط بین تئوری کنترل و پیاده‌سازی آن در فرآیندهای مختلف مدل‌سازی دینامیکی آن می‌باشد. نحوه مدل‌سازی و نگرش طراح در این زمینه، روش‌های متنوع طراحی کنترل‌کننده را سبب شده است. در دیدگاه کلاسیک، مدل‌سازی در حوزه فرکانسی به صورت توابع تبدیل صورت پذیرفته و کلیه مشخصه‌های عملکردی و پایداری سیستم را در این حوزه بررسی می‌کنیم.
این تئوری که در دهه پنجاه میلادی به اوج خود رسیده است، با قضایای بودی، نایکوئیست و روش‌های تحلیلی در طراحی کنترل‌کننده‌های PID، به صورت کامل در کلیه صنایع و سیستم‌های کنترل فرآیندهای صنعتی رسوخ کرده است.
در انتهای دهه پنجاه و شصت نگرش مدرن به مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی به صورت فضای حالت و استفاده از روش‌های عددی و کامپیوتری بجای روش‌های تحلیلی، جای خود را در میان تئوری کنترل باز نموده است. این نگرش به دیدگاه مدرن مشهور است که موضوع این درس می‌باشد. فرم فضای حالت با بهره‌گیری از متغیر حالت، مبنای اصلی روش‌های مدرن تحلیل و طراحی در سیستم‌های

[1] Human Machine Interface

کنترل می‌باشد. با توجه به خصوصیت متغیر حالت در فشرده‌سازی اطلاعات، اهمیت استفاده از آن در مدل‌سازی سیستم‌های خطی بیان شده است.

بخش سوم:

نمایش سیستم های خطی

3 بخش سوم: نمایش سیستم‌های خطی

3-1- مقدمه:

اکثر روش‌های طراحی سیستم‌های کنترل مبتنی بر نوعی مدل ریاضی از سیستم فیزیکی می‌باشند. در طراحی‌های کلاسیک سیستم‌های کنترل (مانند روش‌های پاسخ فرکانسی یا مکان ریشه) از مدل های تابع تبدیل در حوزه s استفاده می‌شود. این مدلها، سیستم‌های فیزیکی و صنعتی ساده یک ورودی یک خروجی را به خوبی مدل کرده و رفتار ورودی خروجی این‌گونه سیستم ها را با دقت قابل قبولی تقریب می زنند. تحلیل دقیق سیستم‌های صنعتی پیچیده تر مدلهای کاملتری از سیستم را می طلبد. همچنین کنترل سیستم‌های صنعتی پیچیده با عملکرده بهتر و بهینه نیازمند طراحی‌های پیشرفته سیستم‌های کنترل است. تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته که در برخورد با این‌گونه سیستم‌های موفق عمل کنند، به مدل‌هایی جامع تر از توابع تبدیل یک ورودی یک خروجی نیازمند است.

مدل‌سازی سیستم‌های کنترل با استفاده از متغیرهای حالت، در راستای اهداف فوق می‌باشد. مدل تابع تبدیل تنها توصیفی از رفتار ورودی – خروجی سیستم ارائه می‌کند، بنابراین آن را توصیف خارجی می‌نامند. در صورتی که متغیرهای حالت، دینامیک داخلی سیستم را نیز توصیف نمایند، مدل‌سازی فضای حالت را توصیف داخلی از سیستم می‌نامند. توصیف فضای حالت سیستم، تصویر کاملی از ساختار داخلی آن به دست می‌دهد. این مدل نشان می‌دهد که متغیرهای حالت چگونه با یکدیگر تداخل پیداکرده، ورودی سیستم چگونه بر متغیرهای حالت سیستم اثر گذاشته و چگونه می‌توان با ترکیب‌های مختلفی از متغیرهای حالت، خروجی سیستم را محاسبه نمود. یکی دیگر از مزایای مدل‌سازی فضای حالت، مدل‌سازی ساده سیستم‌های تغییرپذیر با زمان است. همچنین با این مدل‌سازی می‌توان مدل های سیستم‌های یک ورودی و یک خروجی را به سادگی به سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی تعمیم داد. از دیگر مزایای استفاده از نمایش فضای حالت، واردکردن شرایط اولیه در تحلیل و طراحی سیستم است. همچنین بهینه‌سازی عملکرد سیستم حلقه بسته در فرموله سازی فضای حالت به راحتی انجام می‌پذیرد و لذا می‌توان سیستم‌های کنترل بهینه را در فضای حالت طراحی نمود.

در این بخش، علاوه بر خطی کردن معادلات سیستم، تعیین متغیرهای حالت و نوشتن معادلات حالت و خروجی سیستم، با حل معادلات حالت و خروجی و مسائل مربوط به آن آشنا خواهیم شد.

3-2- نمایش فضای حالت سیستم‌های غیرخطی و خطی:

بسیاری از سیستم ها را می‌توان توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی همزمان به صورت زیر نشان داد:

$$\dot{\vec{x}}(t) = f\left(\vec{x}(t), \vec{r}(t), t\right) \qquad (1\text{-}2)$$

که در آن t متغیر زمان، $\vec{x}(t)$ بردار حالت ستونی تغییرپذیر با زمان n بعدی و $\vec{r}(t)$ بردار ورودی ستونی m بعدی است. f نیز تابعی غیرخطی و توصیف‌کننده سیستم است. برای بسیاری از سیستم ها انتخاب حالت به صورت طبیعی از ساختار فیزیکی به دست آمده و یا اینکه می‌تواند کمیتی صرفاً ریاضی باشد. فرض کنید $\vec{y}$ متغیری l بعدی از سیستم است که بتوان آن را اندازه‌گیری نموده و مشاهده کرد، یا اینکه متغیری باشد که سیستم توسط آن بر محیط اطراف تأثیر می‌گذارد. چنین متغیری را متغیر خروجی سیستم می‌نامند. در حالت کلی می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\vec{y}(t)=g\left(\vec{x}(t),\vec{r}(t),t\right) \qquad (2\text{-}2)$$

به این معادله، معادله خروجی گویند و g تابعی غیرخطی و توصیف‌کننده خروجی سیستم است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی 1-2 و 2-2 را معادلات حالت سیستم می‌گویند. به تعاریف زیر توجه کنید:

1- **مفهوم حالت**: منظور از حالت[1] یک سیستم دینامیکی، کوچک‌ترین مجموعه متغیرهایی است که اگر در لحظه t_0 معلوم باشند، به همراه ورودی در $t \ge t_0$ می‌توان رفتار سیستم در $t \ge t_0$ را به طور کامل تحلیل نمود.

2- **متغیر حالت**: متغیرهای حالت[2] یک سیستم دینامیکی، متغیرهایی هستند که کوچک‌ترین مجموعه تعیین‌کننده حالت سیستم را تشکیل می‌دهند.

اگر برای توصیف کامل رفتار دینامیکی حداقل n متغیر $x_1,x_2,\dots,x_n$ لازم باشد، در صورتی که این n متغیر با مشخص شدن ورودی رفتار سیستم را در هر لحظه $t \ge t_0$ تخمین بزنند، متغیرهای حالت سیستم را تشکیل می‌دهند. متغیرهای حالت یک سیستم لزوماً نباید قابل‌مشاهده/ اندازه‌گیری باشند. حتی این متغیرها می‌توانند فیزیکی نباشند. (که این یکی از مزیت‌های مدل‌سازی حالت می‌باشد.)

به طور مثال در یک مدار RLC، ولتاژ خازن و جریان سلف متغیرهای حالت محسوب می‌شوند. همچنین در یک سیستم مکانیکی جابجایی و سرعت می‌توانند به عنوان متغیرهای حالت انتخاب گردند.

3- **بردار حالت**: اگر $x_1,x_2,\dots,x_n$ متغیرهای حالت یک سیستم باشند، بردار $\vec{x}_{n\times1}$ تعریف‌شده به صورت زیر را بردار حالت گوییم:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4- **فضای حالت**: فضای n بعدی که محورهای مختصات آن $x_1,x_2,\dots,x_n$ باشند، فضای حالت نامیده می‌شود. هر حالت $x_i,\ i=1,2,\dots,n$ بیانگر یک نقطه در فضای حالت می‌باشد.

5- **بعد سیستم**: اگر تعداد متغیرهای حالت سیستم محدود باشد، آن را با ابعاد محدود[3] یا فشرده[4] گویند. همچنین اگر تعداد متغیرهای حالت سیستم نامحدود باشد، سیستم را با ابعاد نامحدود[5] و یا گسترده[6] نامند.

به عنوان مثال سیستم دارای تأخیر واحد، سیستم گسترده می‌باشد.

6- **پاسخ کامل**: پاسخ کامل هر سیستم LTI دارای متغیرهای حالت $\vec{x}_{n\times1}$ و ورودی $\vec{r}_{m\times1}(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

پاسخ کامل = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر (3-2)

که در آن منظور از پاسخ ورودی صفر، پاسخ سیستم تنها به متغیرهای حالت و منظور از پاسخ حالت صفر پاسخ سیستم تنها به ورودی می‌باشد.

در این درس حالت‌هایی بررسی خواهد شد که f و g در آن توابعی خطی باشند. در این صورت، سیستم را خطی نامیده و در حالت کلی معادله حالت سیستم‌های خطی عبارت است از:

---

[1] State
[2] State Variables
[3] Finite Dimensional
[4] Lumped
[5] Infinite Dimensional
[6] Distributed

$$\dot{\vec{x}}(t)=A(t)\vec{x}(t)+B(t)\vec{r}(t) \qquad (3\text{-}2)$$

که در آن $A(t)$ و $B(t)$ به ترتیب ماتریس‌هایی تغییرپذیر با زمان $n\times n$ و $n\times m$ حالت و ورودی یا کنترل می‌باشند. بعد بردار حالت سیستم $\vec{x}(t)$ را بعد سیستم می‌نامند. معادله خروجی سیستم خطی نیز عبارتست از:

$$\vec{y}(t)=C(t)\vec{x}(t)+D(t)\vec{r}(t) \qquad (5\text{-}2)$$

که در آن $C(t)$ و $D(t)$ به ترتیب ماتریس‌هایی تغییرپذیر با زمان $1\times n$ و $1\times m$ بعدی بوده و $C(t)$ را ماتریس خروجی می‌نامند. اگر ماتریس‌های سیستم، A ،B ،C و D ماتریس‌های ثابت باشند، سیستم را تغییرناپذیر با زمان و در غیر این صورت آن را تغییرپذیر با زمان نامند. در حالت کلی، معادلات حالت و خروجی خطی سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان عبارت‌اند از:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+B\vec{r}(t) & (6\text{-}2)\\ \vec{y}(t)=C\vec{x}(t)+D\vec{r}(t) & (7\text{-}2)\end{cases}$$

3-2-1- انتخاب متغیرهای حالت:

اولین قدم در به‌کارگیری مفاهیم فضای حالت جهت تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، انتخاب متغیرها حالت سیستم است. متغیرهای حالت انتخاب‌شده برای توصیف داخلی سیستم، منحصر بفرد نبوده و روش منحصر به فردی نیز برای انتخاب متغیرهای حالت وجود ندارد. سه نمایش متداول برای بیان حالت سیستم عبارت‌اند از: متغیرهای فیزیکی، فاز و حالت کانونیکال. در این بخش با متغیرهای حالت فیزیکی آشنا خواهیم شد. لازم به تذکر است که تنها در انتخاب متغیرهای حالت فیزیکی، حالت‌ها با متغیرهای فیزیکی سیستم متناظر هستند و در نمایش‌های دیگر لزوماً این چنین نخواهد بود.

انتخاب متغیرهای حالت در روش متغیرهای فیزیکی، بر اساس عناصر نگه‌دارنده انرژی سیستم بنانهاده شده است. جدول زیر بعضی عناصر متداول نگه‌دارنده انرژی را که در سیستم‌های فیزیکی وجود دارند، همراه با معادلات انرژی متناظرشان نشان می‌دهد.

جدول 2-1: عناصر متداول نگه‌دارنده انرژی

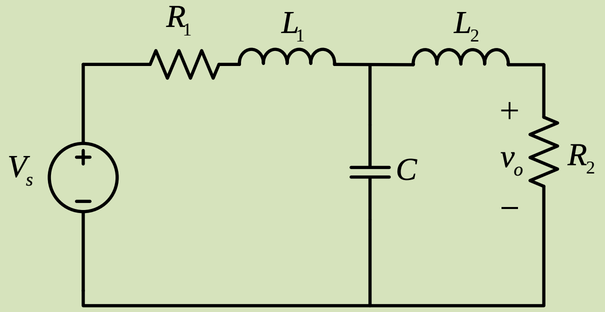
عنصر	انرژی	متغیر فیزیکی
خازن C	$\frac{1}{2}CV^2$	ولتاژ V
سلف L	$\frac{1}{2}Li^2$	جریان i
جرم M	$\frac{1}{2}MV^2$	سرعت انتقالی V
ممان اینرسی J	$\frac{1}{2}Jw^2$	سرعت چرخشی w
فنر k	$\frac{1}{2}kx^2$	جابجایی x
تراکم پذیری مایع $\frac{V}{K_B}$	$\frac{1}{2}\frac{V.P^2}{K_B}$	فشار P
خازن حرارتی C	$\frac{1}{2}Cq^2$	حرارت q

متغیر فیزیکی در معادله انرژی برای هر عنصر نگه‌دارنده انرژی می‌تواند به عنوان متغیر حالت سیستم انتخاب شود. باید توجه داشت که تنها متغیرهای فیزیکی مستقل به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند و متغیرهای حالت مستقل به متغیرهای

حالتی گفته می‌شود که نتوان آن‌ها را بر حسب متغیرهای حالت تعیین‌شده دیگر بیان کرد. در بعضی از سیستم ها ممکن است که علاوه بر متغیرهای نگه‌دارنده انرژی از متغیرهای دیگر نیز استفاده گردد.

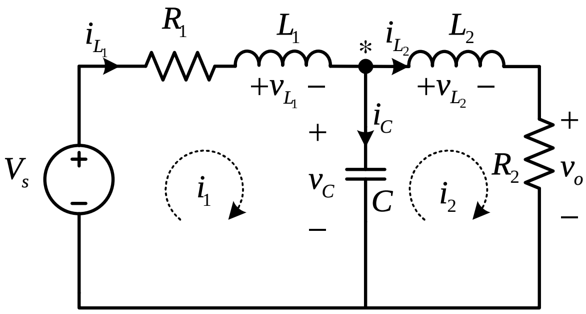
مثال 3-1

معادلات حالت سیستم‌های زیر را به ازای بردار حالت نشان داده‌شده، به دست آورید.



$$\rightarrow x=\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$$

(1)



اکنون برای به دست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات حاکم بر ولتاژ سلف‌ها و جریان خازن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -V_s+R_1i_1+v_{L_1}+v_C=0 & \text{معادله مش ۱:} \\ -v_C+v_{L_2}+R_2i_2=0 & \text{معادله مش ۲:} \\ i_C=i_1-i_2 & \text{معادله گره ⁕:} \end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را به دست می‌آوریم، برای این کار تمام متغیرها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آن‌ها تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_{L_1}=V_s-R_1i_1-v_C=V_s-R_1i_{L_1}-v_C \\ v_{L_2}=v_C-R_2i_2=v_C-R_2i_{L_2} \\ i_C=i_1-i_2=i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt}=V_s-R_1i_{L_1}-v_C \\ L_2\dfrac{di_{L_2}}{dt}=v_C-R_2i_{L_2} \\ C\dfrac{dv_C}{dt}=i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_{L_1}}{dt}=\dfrac{1}{L_1}\left(V_s-R_1i_{L_1}-v_C\right) \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt}=\dfrac{1}{L_2}\left(v_C-R_2i_{L_2}\right) \\ \dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{1}{C}\left(i_{L_1}-i_{L_2}\right) \end{cases}$$

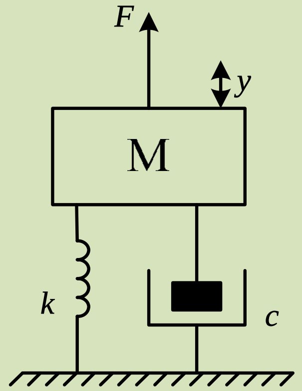
اکنون معادله خروجی را به دست می‌آوریم:

$$v_o=v_{R_2}=R_2i_2=R_2i_{L_2}$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله 2-7 و 2-8 داریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_{L_1}\\ \dot{i}_{L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C} & \frac{-1}{C}\\ \frac{-1}{L_1} & \frac{-R_1}{L_1} & 0\\ \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{-R_2}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L_1}\\ 0\end{bmatrix}\times V_s$$

$$v_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+0\times V_s$$



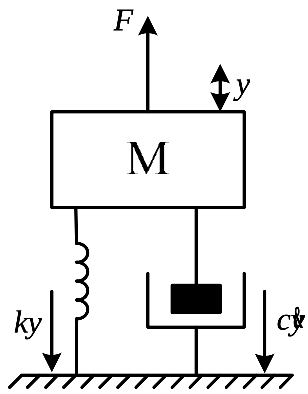
$$\rightarrow x=\begin{bmatrix}y\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

(2)

با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum F=Ma$$

که در آن $\sum F$ مجموع نیروهای وارده[1] بر جسم M و a شتاب آن می‌باشد:



بنابراین با توجه به شکل فوق داریم:

[1] رابطه نیروی فنر و جابجایی آن برابر kx و رابطه نیروی دمپر و جابجایی آن برابر $k\frac{dx}{dt}$ می باشد.

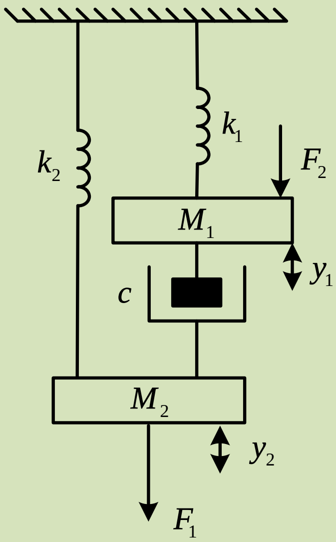
$$\begin{cases} F - ky - c\dot{y} = Ma \\ a = \ddot{y} \end{cases} \rightarrow F - ky - c\dot{y} = M\ddot{y}$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{M}\left(F - ky - c\dot{y}\right) = \frac{1}{M}\left(F - kx_1 - cx_2\right) \end{cases}$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله 2-7 و 2-8 داریم:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \times F_M$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{M} & \frac{-c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \times F_M$$



$$\rightarrow x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

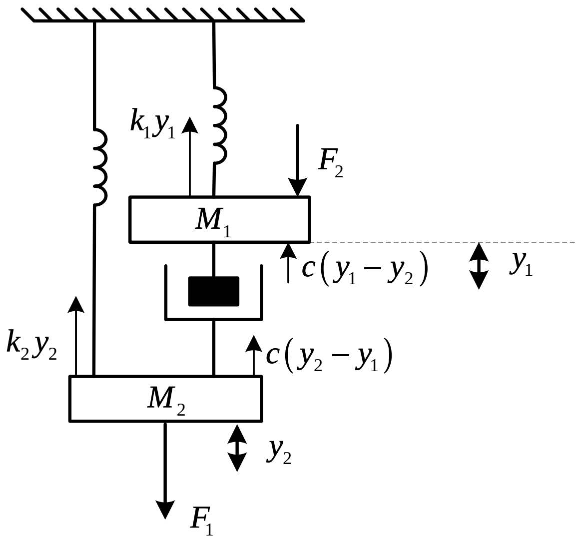
(3)

با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum F = Ma$$

که در آن $\sum F$ مجموع نیروهای وارده بر جسم M و a شتاب آن می‌باشد:

$$\begin{cases} F_1 - k_1 y_1 - c\frac{d}{dt}\left(y_1 - y_2\right) = M_1 a_1 = M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \\ F_2 - k_2 y_2 - c\frac{d}{dt}\left(y_2 - y_1\right) = M_2 a_2 = M_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \end{cases} \qquad (*)$$



$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 = \dot{x}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

با استفاده از معادلات $(*)$ داریم:

$$\begin{cases} F_1 - k_1x_1 - c\dfrac{d}{dt}(x_1 - x_3) = M_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = M_1\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx_1}{dt}\right) = M_1\dfrac{dx_2}{dt} \\ F_2 - k_2x_3 - c\dfrac{d}{dt}(x_3 - x_1) = M_2\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx_3}{dt}\right) = M_2\dfrac{dx_4}{dt} \end{cases}$$

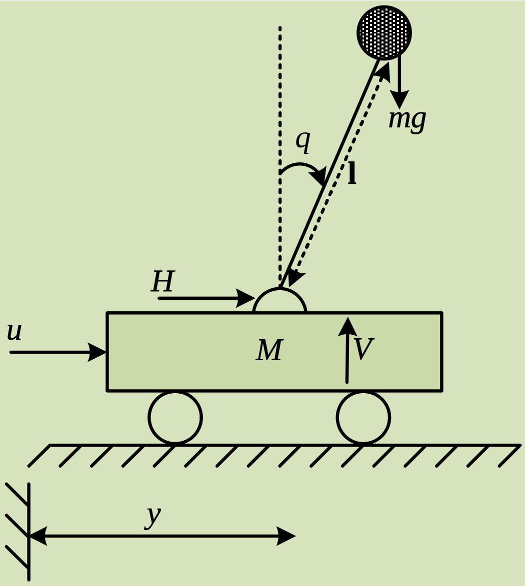
$$\rightarrow \begin{cases} F_1 - k_1x_1 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_3 = M_1\dot{x}_2 \\ F_2 - k_2x_3 - c\dot{x}_3 + c\dot{x}_1 = M_2\dot{x}_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_1 - k_1x_1 - cx_2 + cx_4 = M_1\dot{x}_2 \\ F_2 - k_2x_3 - cx_4 + cx_2 = M_2\dot{x}_4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{M_1}(F_1 - k_1x_1 - cx_2 + cx_4) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{1}{M_2}(F_2 + cx_2 - k_2x_3 - cx_4) \end{cases}$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله 2-7 و 2-8 داریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-k_1}{M_1} & \dfrac{-c}{M_1} & 0 & \dfrac{c}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{c}{M_2} & \dfrac{-k_2}{M_2} & \dfrac{-c}{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$



$$M\ddot{y} = u - mg\theta$$
$$M l \ddot{\theta} = (M+m) g\theta - u$$

(4)

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} = \dot{x}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{x}_2 \\ \ddot{\theta} = \dot{x}_4 \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} M\dot{x}_2 = u - mgx_3 \\ M l \dot{x}_4 = (M+m) g x_3 - u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{mg}{M} x_3 + \dfrac{1}{M} u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{(M+m) g}{M l} x_3 - \dfrac{1}{M l} u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله 2-7 و 2-8 داریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(M+m) g}{M l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{M} \end{pmatrix}$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+0\times u$$

<

3-2-2- تابع تبدیل و ارتباط آن با معادلات حالت:

تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، طبق تعریف نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن می‌باشد؛ بنابراین، اگر تابع تبدیل یک سیستم را با $G(s)$ نمایش دهیم داریم:

$$G(s)=\frac{\mathcal{L}\{c(t)\}}{\mathcal{L}\{r(t)\}}=\frac{C(s)}{R(s)} \tag{8-2}$$

که در آن $y(t)$ و $x(t)$ به ترتیب خروجی و ورودی سیستم می‌باشند. با داشتن معادلات حالت نیز می‌توان به تابع تبدیل رسید. با اعمال تبدیل لاپلاس به هر دو معادله 1-5 داریم:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+B\vec{r}(t)\\ y(t)=C\vec{x}(t)+D\vec{r}(t)\end{cases}\xrightarrow{\mathcal{L}\{\ \}}\begin{cases}sX(s)=AX(s)+BR(s)\\ Y(s)=CX(s)+DR(s)\end{cases}$$

$$\rightarrow X(s)(sI-A)=BR(s)\rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}BR(s)$$

$$\rightarrow Y(s)=C\left((sI-A)^{-1}BR(s)\right)+DR(s)=\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)R(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D \tag{9-2}$$

مثال 3-2

تابع تبدیل سیستم دوم مثال 2-1 را به ازای مقادیر داده‌شده به دست آورید.

$$1)\begin{cases}M=1^{kg}\\ k=2^{\mathrm{N/m}}\\ c=1^{N/m/\sec}\end{cases}$$

با جایگزین کردن مقادیر در معادلات حالت به دست آمده از مثال 1-4 داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\times F_M\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+0\times F_M\end{cases}\rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},D=0$$

بنابراین:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$\rightarrow (sI-A)^{-1}=\left(s\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-2&-1\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}s&-1\\2&s+1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{s(s+1)+2}\begin{pmatrix}s+1&1\\-2&s\end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+s+2}\begin{pmatrix}s+1&1\\-2&s\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow G(s)=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s^2+s+2}\begin{pmatrix}s+1&1\\-2&s\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+s+2}\left(\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+1&1\\-2&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2+s+2}\left(\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{s^2+s+2}$$

<

3-3-خطی سازی سیستم‌های غیرخطی:

اگرچه دینامیک حاکم بر اکثر فرآیندهای صنعتی و سیستم‌های واقعی، غیرخطی است لیکن تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل برای حالت غیرخطی بسیار دشوار و پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌های غیرخطی در بسیاری از موارد عملی و کاربردی امری غیرضروری است. در واقع، در عمل نشان داده‌شده است که سیستم‌های کنترل خطی، رده بسیار وسیعی از سیستم‌های واقعی و فرآیندهای پیچیده صنعتی را بخوبی کنترل می‌نمایند. از این رو، به دست آوردن مدل های دقیق خطی از سیستم‌های غیرخطی از نظر مهندسی بسیار مهم و اجتناب‌ناپذیر است. یک روش کاربردی و موفق در خطی سازی معادلات غیرخطی سیستم، بر اساس بسط تیلور است. تابع کلی $f(t)$ را در نظر بگیرید. با فرض تحلیلی بودن تابع بسط تیلور این تابع به صورت سری بی‌نهایت زیر توصیف می‌نماید:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n f(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}(t-t_0)^n \qquad (10\text{-}2)$$

این سری حول نقطه $t=t_0$ بسط داده‌شده است. نقطه t_0 را نقطه کار یا نقطه تعادل می‌نامند. معادله 10-2 را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(t)=f(t_0)+\frac{df(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f(t)}{dt^2}\bigg|_{t=t_0}(t-t_0)^2+\ldots$$

$$=f(t_0)+\frac{df(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}(t-t_0)+\text{عبارات مرتبه بالاتر}^{1}$$

$$;\ f(t_0)+\frac{df(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}(t-t_0) \qquad (11\text{-}2)$$

که در معادله آخر از عبارات مرتبه بالاتر صرفنظر شده است.

در حالت کلی تر که تابع برداری $\check{f}$ به چندین متغیر مانند $x_1,x_2,\ldots,x_n$ وابسته است، معادله 11-2 به صورت زیر خواهد بود:

[1] Higher Order Terms (h.o.t)

$$\vec{f}(t) \approx \vec{f}(t_0)+\left.\frac{\partial \vec{f}(t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}(t-t_0) \qquad (12\text{-}2)$$

که در آن:

$$\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

می‌باشند. ماتریس $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$ را ماتریس ژاکوبین[1] نامیده و به صورت J_t نمایش می‌دهند. درایه (i,j) ماتریس J_t برابر است با:

$$(J_t)_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \qquad (13\text{-}2)$$

با اعمال روند خطی سازی بالا به معادلات غیرخطی سیستم 2-1 حول نقطه کار (x_0,r_0) و با تعریف

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0(t)+\Delta\vec{x}(t) \qquad (14\text{-}2)$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0(t)+\Delta\vec{r}(t) \qquad (15\text{-}2)$$

که در آن Δx و Δr به ترتیب انحرافات کوچک حول نقطه کار را می‌دهند، داریم:

$$\dot{\vec{x}}_0(t)+\Delta\dot{\vec{x}}(t)=\vec{f}(x_0,r_0,t)+J_x(x_0,r_0,t)\Delta\vec{x}(t)+J_r(x_0,r_0,t)\Delta\vec{r}(t)+h.o.t \qquad (16\text{-}2)$$

و لذا با صرفنظر کردن از عبارات مرتبه بالاتر، به دست می‌آوریم:

$$\Delta\dot{\vec{x}}(t)=A(t)\Delta\vec{x}(t)+B(t)\Delta\vec{r}(t) \qquad (17\text{-}2)$$

که در آن:

$$A(t)=J_x(x_0,r_0,t),B(t)=J_r(x_0,r_0,t)$$

می‌باشد. به طور مشابه برای معادله غیرخطی خروجی 2-2 داریم:

$$\Delta\vec{y}(t)=C(t)\Delta\vec{x}(t)+D(t)\Delta\vec{r}(t) \qquad (18\text{-}2)$$

که در آن:

$$C(t)=g_x(x_0,r_0,t),D(t)=g_r(x_0,r_0,t)$$

g_x و g_r به ترتیب، ماتریس‌های ژاکوبین بر حسب $\vec{x}(t)$ و $\vec{r}(t)$ می‌باشند. در صورتی که سیستم تغییرناپذیر با زمان باشد، بازنویسی معادلات 2-17 و 2-18، معادلات حالت و خروجی خطی سازی شده سیستم را حول نقطه کار به صورت زیر به دست می‌دهند:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+B\vec{r}(t) & (19\text{-}2) \\ \vec{y}(t)=C\vec{x}(t)+D\vec{r}(t) & (20\text{-}2) \end{cases}$$

مثال 3-3

معادلات حالت خطی شده سیستم‌های زیر به دست آورید:

[1] Jacobian

$$1)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1^2(t)-\sin 3x_2(t)+r_1^3(t)-r_2(t)=f_1(t)\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=x_1(t)e^{-x_2(t)}+x_2(t)-r_1(t)=f_2(t)\end{cases}\qquad ,\left(\vec{x}(0),\vec{r}(0)\right)=(0,0)$$

ابتدا ماتریس‌های ژاکوبین J_x و J_r را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$J_x=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1(t) & -3\cos x_2(t)\\ e^{-x_2(t)} & -x_1(t)e^{-x_2(t)}+1\end{pmatrix}_{\vec{x}(0)=0}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$J_r=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial r_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial r_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial r_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3r_1^2(t) & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}_{\vec{r}(0)=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$\Delta\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Delta\vec{x}(t)+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Delta\vec{r}(t)$$

$$2)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2(t)=f_1(t)\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-2\left(1+x_1(t)\right)x_2(t)+4x_1^3(t)+2r(t)=f_2(t)\end{cases}\qquad ,\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},r(0)=0$$

ابتدا ماتریس‌های ژاکوبین J_x و J_r را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$J_x=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ x_2(t)+12x_1^2(t) & -2\left(1+x_1(t)\right)\end{pmatrix}_{\vec{x}(0)=0}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 13 & -4\end{pmatrix}$$

$$J_r=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\Delta\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 13 & -4\end{pmatrix}\Delta\vec{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}\Delta r(t)$$

<

بخش چهارم:

تئوری سیستم های خطی

3 بخش چهارم: تئوری سیستم‌های خطی:

4-1- مقدمه:

موضوع مورد بحث در این فصل، تئوری سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (LTI) است. یکی از انگیزه‌های مهم بررسی تئوری سیستم‌های خطی این است که در همسایگی نقاط تعادل،کلیه سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با یک مدل خطی تقریب زد؛ اما دلیل اصلی بررسی دقیق سیستم‌های خطی این است که تنها در مورد این‌گونه سیستم ها تئوری کامل و کاربردی تدوین شده است. بدین دلیل است که در بسیاری از کاربردهای صنعتی از کلیه عوامل غیرخطی در فاز طراحی کنترل‌کننده صرفنظر می‌شود. در این حالت همانگونه که در فصل قبل نمایش داده شد، یک مدل خطی متغیر با زمان مبنای طراحی کنترل‌کننده قرار می‌گیرد و در عمل عوامل غیرخطی تنها در مشابه سازی سیستم حلقه بسته به منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده استفاده می‌شوند. جالب توجه است که مدلهای خطی در اغلب موارد منجر به استنباط مناسبی از رفتار سیستم شده و کنترل‌کننده‌های قابل قبولی برای سیستم تولید می‌کنند.

4-2- خصوصیات سیستم‌های خطی:

یک سیستم LTI را با معادلات حالت به فرم ماتریسی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{r}(t) \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{r}(t) \end{cases} \qquad (1\text{-}4)$$

که در آن بعد ماتریس $\vec{x}$ برابر n، بعد ورودی برابر k و بعد خروجی برابر m می‌باشد. در سیستم‌های LTI ماتریس‌های A,B,C,D دارای عناصر ثابت و نامتغیر با زمان می‌باشند. فرض کنید شرایط اولیه $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ باشد. می‌توان نشان داد پاسخ سیستم $\vec{x}(t)$ که از شرایط اولیه $\vec{x}_0$ شروع می‌شود وجود داشته و یکتاست.

پاسخ این نوع سیستم ها را با توجه به خطی بودن آن‌ها می‌توان سیستم به دو جز تقسیم نمود:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \\ &= \vec{x}_{zi}(t) + \vec{x}_{zs}(t) \end{aligned} \qquad (2\text{-}4)$$

که در آن $\vec{x}_h(t)$ یا $\vec{x}_{zi}(t)$ مربوط به پاسخ همگن یا بدون ورودی[1] می‌باشد که با توجه به تعریف باید معادله زیر را برآورده کند:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_{zi}(t) = A\vec{x}_{zi}(t) \\ \vec{y}_{zi}(t) = C\vec{x}_{zi}(t) \end{cases} \quad , \vec{x}_{zi}(0) = x_0 \qquad (3\text{-}4)$$

از طرفی $\vec{x}_p(t)$ یا $\vec{x}_{zs}(t)$ مربوط به پاسخ خصوصی یا بدون شرایط اولیه[2] می‌باشد که با توجه به تعریف باید معادله زیر را برآورده کند:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_{zs}(t) = A\vec{x}_{zs}(t) + B\vec{r}(t) \\ \vec{y}_{zs}(t) = C\vec{x}_{zs}(t) + D\vec{r}(t) \end{cases} \quad , \vec{x}_{zs}(0) = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

طبق خواص خطی بودن پاسخ سیستم‌های LTI می‌توان خواص خطی بودن در اجزا پاسخ را نیز به صورت زیر تعیین نمود:

---
[1] Zero Input
[2] Zero State

الف) خطی بودن پاسخ همگن $\vec{x}_{zi}$:

فرض کنید $\vec{x}_1(t)$ مربوط به شرایط اولیه $\vec{x}_1(0)=\vec{x}_{10}$ و $\vec{x}_2(t)$ پاسخ مربوط به شرایط اولیه $\vec{x}_2(0)=\vec{x}_{20}$ باشد. طبق خاصیت خطی بودن سیستم در صورتی که شرایط اولیه $\vec{x}(0)=a\,\vec{x}_{10}+b\,\vec{x}_{20}$ باشد، پاسخ سیستم برابر است با:

$$\vec{x}(t)=a\,\vec{x}_1(t)+b\,\vec{x}_2(t) \tag{5-4}$$

ب) خطی بودن پاسخ خصوصی $\vec{x}_{zs}$:

فرض کنید $\vec{x}_1(t)$ مربوط به ورودی $\vec{r}_1(t)$ و $\vec{x}_2(t)$ پاسخ مربوط به ورودی $\vec{r}_2(t)$ باشد. طبق خاصیت خطی بودن سیستم در صورتی که ورودی $\vec{r}(t)=a\,\vec{r}_1(t)+b\,\vec{r}_2(t)$ باشد، پاسخ سیستم برابر است با:

$$\vec{x}(t)=a\,\vec{x}_1(t)+b\,\vec{x}_2(t) \tag{6-4}$$

ج) خاصیت روی‌هم گذاری:

خاصیت روی‌هم گذاری، مهم‌ترین خاصیت سیستم‌های خطی در حل معادلات حالت می‌باشد. پاسخ کامل یک سیستم خطی که دارای شرایط اولیه $\vec{x}(0)$ و ورودی $\vec{r}(t)$ می‌باشد، از جمع دو پاسخ همگن و خصوصی به دست می‌آید:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_{zi}(t)+\vec{x}_{zs}(t) \tag{7-4}$$

با توجه به این خاصیت منطقی است که برای تعیین پاسخ کامل معادلات حالت، هر یک از اجزا پاسخ را جداگانه محاسبه نماییم که در بخش‌های آتی به این امر خواهیم پرداخت.

4-3- حل معادلات سیستم‌های LTI:

4-3-1- حل پاسخ همگن یا بدون ورودی:

سیستم خطی بدون ورودی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)\\ \vec{x}(0)=x_0\end{cases} \tag{8-4}$$

از این معادله مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\vec{x}}(t)=A\dot{\vec{x}}(t)=A^2\vec{x}(t)\\
&\dddot{\vec{x}}(t)=A^2\dot{\vec{x}}(t)=A^3\vec{x}(t)\\
&\vdots\\
&\vec{x}^{(k)}(t)=A^k\vec{x}(t)\\
&\vec{x}^{(k)}(0)=A^k\vec{x}(0)=A^k\vec{x}_0
\end{aligned}$$

که در آن $\vec{x}^{(k)}$ مشتق k ام می‌باشد. این معادله نشان می‌دهد که $\vec{x}^{(k)}(0)$ برای کلیه توان‌های محدود وجود خواهد داشت.

حال با استفاده از سری تیلور پاسخ $\vec{x}(t)$ را بر حسب مشتقات آن در زمان صفر تعبیر می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t)&=\dot{\vec{x}}(0)t+\frac{1}{2!}\ddot{\vec{x}}(0)t^2+\ldots+\frac{1}{k!}\vec{x}^{(k)}(0)t^k+\ldots\\
&=\vec{x}_0+A\vec{x}_0\,t+\frac{1}{2!}A^2\vec{x}_0\,t^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^k\vec{x}_0\,t^k+\ldots
\end{aligned}$$

$$=\left(I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\ldots\right)\vec{x}_0$$

لذا پاسخ همگن به فرم ساده زیر تعبیر می‌شود:

$$\vec{x}(0)=\varphi(t)\vec{x}_0$$

که در آن $\varphi(t)$ ماتریس انتقال حالت یا ماتریس نمایی است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varphi(t)=e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\ldots \qquad (9\text{-}4)$$

این معادله نشان می‌دهد که $\vec{x}(t)$ به عنوان یک تابع متغیر با زمان و با بعد نامحدود به راحتی از اطلاعات موجود در $\vec{x}_0$ و مشخصات سیستم $\varphi(t)=e^{At}$ قابل محاسبه است.

نکته: خصوصیات اصلی ماتریس انتقال حالت به شرح زیر است:

1) $\varphi(0)=e^{A\times 0}=I$

2) $\varphi(t_1+t_2)=e^{A(t_1+t_2)}=e^{At_1}e^{At_2}=\varphi(t_1)\varphi(t_2)$

3) $\varphi^{-1}(t)=\left(e^{At}\right)^{-1}=e^{-At}=e^{A(-t)}=\varphi(-t)$

4) $\left(e^{At}\right)^T=e^{A^Tt}$

5) $Ae^{At}=e^{At}A$

6) $\frac{d}{dt}(\varphi(t))=\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)=Ae^{At}=A\varphi(t)$

4-3-2- حل کامل معادلات حالت:

برای تعیین حل کامل، معادله حالت را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{\vec{x}}(t)-A\vec{x}(t)=B\vec{r}(t)$$

با ضرب طرفین معادله در e^{-At} داریم:

$$e^{-At}\dot{\vec{x}}(t)-e^{-At}A\vec{x}(t)=e^{-At}B\vec{r}(t)$$

$$\rightarrow e^{-At}\dot{\vec{x}}(t)-Ae^{-At}\vec{x}(t)=e^{-At}B\vec{r}(t)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\vec{x}(t)\right)=e^{-At}B\vec{r}(t)$$

اکنون با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\vec{x}(t)\right)dt=\int_{t_0}^{t}e^{-At}B\vec{r}(t)\,dt$$

$$\rightarrow e^{-At}\vec{x}(t)\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}e^{-At}B\vec{r}(t)\,dt$$

$$\rightarrow e^{-At}\vec{x}(t)-e^{-At_0}\vec{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-At}B\vec{r}(t)\,dt$$

بنابراین با ضرب e^{At} در طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\underbrace{e^{At}e^{-At}}_{I}\vec{x}(t)-e^{At}e^{-At_0}\vec{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{At}e^{-At}B\vec{r}(t)\,dt$$

$$\rightarrow \vec{x}(t)-e^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{A(t-t)}B\vec{r}(t)\,dt$$

$$\rightarrow \vec{x}(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}}_{\varphi(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{\varphi(t-\tau)} B\vec{u}(\tau)d\tau$$

بنابراین:

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\varphi(t-t_0)\vec{x}(t_0)}_{\vec{x}_{zi}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \varphi(t-\tau)B\vec{u}(\tau)d\tau}_{\vec{x}_{zs}} \qquad (10\text{-}4)$$

همان طور که مشخص است پاسخ کلی از دو جزء $\vec{x}_{zi}$ و $\vec{x}_{zs}$ تشکیل شده است که قسمت همگن در قسمت 4-3-1 محاسبه شده است و پاسخ $\vec{x}_{zs}$ یا خصوصی مطابق انتظار فرم انتگرال کانولوشن را دارد. این انتگرال کانولوشن با استفاده از تابع $\varphi(t-\tau)$ یا ماتریس انتقال محاسبه می‌شود. از طرفی خروجی سیستم را می‌توان از معادله

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)$$

به دست آورد؛ بنابراین:

$$\vec{y}(t) = C\varphi(t-t_0)\vec{x}(t_0) + C\int_{t_0}^{t} \varphi(t-\tau)B\vec{u}(\tau)d\tau + D\vec{u}(t) \qquad (11\text{-}4)$$

مثال 4-1

پاسخ کامل سیستم زیر را به ازای $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و ورودی پله واحد تعیین کنید:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\vec{u}(t)$$

ابتدا ماتریس انتقال حالت را تعیین می‌کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}t^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}t^3 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots & 0 \\ t + t^2 + \dots & 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots \end{pmatrix}$$

اکنون پاسخ خصوصی را محاسبه می‌کنیم:

$$e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau) = e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u(\tau) = e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \geq 0$$

$$\rightarrow e^{A(t-\tau)} = e^{At}e^{-A\tau} = \varphi(t)\varphi(-\tau) = e^{At}\begin{pmatrix} 1 - \tau + \frac{1}{2}\tau^2 - \dots & 0 \\ -\tau + \tau^2 - \dots & 1 - \tau + \frac{1}{2}\tau^2 - \dots \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow e^{A(t-\tau)}B\vec{r}(t)=e^{At}\begin{pmatrix}1-t+\frac{1}{2}t^2-\ldots & 0\\ -t+t^2-\ldots & 1-t+\frac{1}{2}t^2-\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=e^{At}\begin{pmatrix}1-t+\frac{1}{2}t^2-\ldots\\ 1-2t+\frac{3}{2}t^2-\ldots\end{pmatrix}\quad t\ge 0$$

$$\vec{x}_{zs}=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=e^{At}\int_0^t\begin{pmatrix}1-t+\frac{1}{2}t^2-\ldots\\ 1-2t+\frac{3}{2}t^2-\ldots\end{pmatrix}dt=e^{At}\begin{pmatrix}t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\ldots\\ t-t^2+\frac{1}{2}t^3-\ldots\end{pmatrix}$$

بنابراین پاسخ کامل[1] عبارتست از:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_{zi}+\vec{x}_{zs}=e^{At}\vec{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{pmatrix}1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots & 0\\ t+t^2+\ldots & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots & 0\\ t+t^2+\ldots & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\ldots\\ t-t^2+\frac{1}{2}t^3-\ldots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\\ 1+2t+\frac{3}{2}t^2+\ldots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\right)\left(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\ldots\right)\\ \left(t+t^2+\ldots\right)\left(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\ldots\right)+\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\right)\left(t-t^2+\frac{1}{2}t^3-\ldots\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\\ 1+2t+\frac{3}{2}t^2+\ldots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t+\frac{1}{2}t^2+\ldots\\ t+t^2+\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t+t^2+\ldots\\ 1+3t+\frac{5}{2}t^2+\ldots\end{pmatrix}$$

<

3-4-3- روش‌های تعیین ماتریس انتقال حالت:

الف) روش تبدیل لاپلاس: توسط تبدیل لاپلاس پاسخ کامل سیستم خطی را می‌توان به صورت تحلیلی تعیین نمود. سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

---

[1] کد MATLAB برای محاسبات فوق:

```
>> syms t
>> A=[1+t+0.5*t^2 0;t+t^2 1+t+0.5*t^2]
 A =
 [ t^2/2 + t + 1,        0]
 [     t^2 + t, t^2/2 + t + 1]
 >> B=[t-0.5*t^2+1/6*t^3;t-t^2+0.5*t^3]
 B =
 t^3/6 - t^2/2 + t
 t^3/2 - t^2 + t
 >> expand(A*B)
 ans =
  t^5/12 - t^4/12 + t^3/6 + t^2/2 + t
 (5*t^5)/12 - t^4/3 + t^3/2 + t^2 + t
>> C=[1+t+0.5*t^2;1+2*t+1.5*t^2]
 C =
 t^2/2 + t + 1
 (3*t^2)/2 + 2*t + 1
 >> expand(A*B+C)
```

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{r}(t)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس

$$s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) = A\vec{X}(s) + B\vec{R}(s)$$
$$\rightarrow (sI - A)\vec{X}(s) = \vec{x}(0) + B\vec{R}(s)$$
$$\rightarrow \vec{X}(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}\vec{x}(0)}_{\vec{X}_{zi}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}B\vec{R}(s)}_{\vec{X}_{zs}} = f(s)\left(\vec{x}(0) + B\vec{R}(s)\right)$$

این پاسخ مشابه با حالت قبل از دو جز $\vec{x}_{zi}$ و $\vec{x}_{zs}$ تشکیل شده، با این تفاوت که در حوزه فرکانسی s بیان شده است. با برقراری تساوی این دو معادله خواهیم داشت:

$$j(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} \qquad (12\text{-}4)$$

که در آن $\mathcal{L}^{-1}\{\ \}$ معرف معکوس تبدیل لاپلاس می‌باشد.

مثال 4-2

پاسخ کامل سیستم زیر را به ازای ورودی پله واحد تعیین کنید:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\vec{r}(t)$$

ابتدا ماتریس انتقال حالت را تعیین می‌کنیم:

$$sI - A = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+3}\begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+3}\begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix} = f(s)$$

$$\rightarrow j(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+3} & \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix} \qquad t \geq 0$$

اکنون پاسخ کامل را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{X}(s) = f(s)\left(\vec{x}(0) + B\vec{R}(s)\right)$$

$$= f(s)\left(\vec{x}(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s}\right) = f(s)\vec{x}(0) + \underbrace{\frac{1}{s^2+4s+3}\begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{pmatrix}}_{f(s)}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

$$= f(s)\vec{x}(0)+\frac{1}{s^2+4s+3}\begin{pmatrix}\frac{1}{s}\\ 1\end{pmatrix}=\vec{x}(0)+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+3}\\ \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ -3e^{-t}+3e^{-3t} & -e^{-t}+3e^{-3t}\end{pmatrix}\vec{x}(0)+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2-3e^{-t}+e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t}\end{pmatrix}\qquad t\geq 0$$

<

ب) مودهای دینامیکی: اگر فرم فرکانسی $f(s)$ را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$f(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{\text{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} \tag{13-4}$$

این معادله مبین روش کرامر در تعیین معکوس ماتریس می‌باشد. این معادله را می‌توان بر حسب ریشه‌های دترمینان مخرج بسط داد:

$$f(s)=\frac{A_{11}}{s-s_1}+\frac{A_{12}}{(s-s_1)^2}+\ldots+\frac{A_{21}}{s-s_2}+\frac{A_{22}}{(s-s_2)^2}+\ldots$$

که در آن معادله فوق به صورت کسرهای جزئی از ریشه‌های دترمینان نوشته شده و فرض شده است که در حالت کلی ریشه‌های دترمینان می‌توانند تکراری باشند. حال با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس خواهیم داشت:

$$j(t)=A_{11}e^{s_1t}+A_{12}te^{s_1t}+\ldots+A_{21}e^{s_2t}+A_{22}te^{s_2t}+\ldots \tag{14-4}$$

که در آن $s_1,s_2,\ldots$ ریشه‌های معادله زیر می‌باشند:

$$\det(sI-A)=0 \tag{15-4}$$

اما این معادله دقیقاً معادله مقادیر ویژه ماتریس A است. لذا s_i مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند و ماتریس انتقال از ترکیب خطی توابع نمایی با توان مساوی با s_it ماتریس A تشکیل می‌شود که در صورت تکراری بودن، ضریب زمان نیز گرفته‌اند.
در تئوری سیستم‌های خطی به مقادیر ویژه ماتریس سیستم، مودهای دینامیکی گفته می‌شود. ویژگی خاص مود دینامیکی این است که اجزای اصلی دینامیکی سیستم را معین می‌کند. دقت کنید که هر مقدار ویژه به صورت متناظر دارای بردار ویژه‌ای نیز می‌باشد:

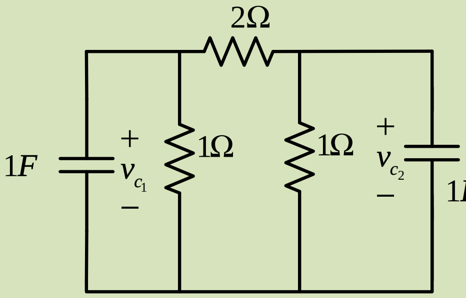
$$A\vec{v}_i=s_i\vec{v}_i \tag{16-4}$$

حال این بردار ویژه سیستم، در ماتریس انتقال حالت نیز ویژگی زیر را از خود بروز می‌دهد:

$$j(t)\vec{v}_i=e^{At}\vec{v}_i=\vec{v}_i+A\vec{v}_it+\frac{1}{2!}A^2\vec{v}_it^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^k\vec{v}_it^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\vec{v}_it^k}{k!} \tag{17-4}$$

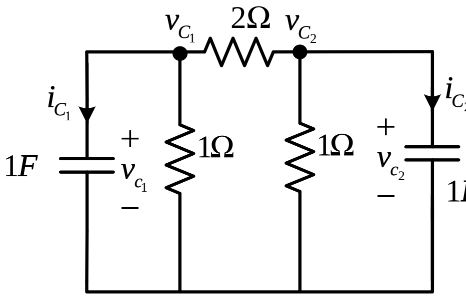
مثال 4-3

برای شبکه مداری زیر مودهای دینامیکی و بردارهای مودال را تعیین نموده و پاسخ سیستم را به شرایط اولیه معادل دو بردار ویژه آن به دست آورید:



$$\rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix}$$

ابتدا معادلات حالت سیستم را تعیین می‌کنیم:



$$\rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} i_{C_1} + \dfrac{v_{C_1}}{1} + \dfrac{v_{C_1} - v_{C_2}}{2} = 0 \\ i_{C_2} + \dfrac{v_{C_2}}{1} + \dfrac{v_{C_2} - v_{C_1}}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1\dfrac{dv_{C_1}}{dt} = -\dfrac{3}{2}v_{C_1} + \dfrac{1}{2}v_{C_2} \\ 1\dfrac{dv_{C_2}}{dt} = \dfrac{1}{2}v_{C_1} - \dfrac{3}{2}v_{C_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{3}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

برای محاسبه مقادیر ویژه داریم:

$$\det(sI - A) = 0 \rightarrow \left| s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s + \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & s + \dfrac{3}{2} \end{vmatrix} = \left(s + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0$$

$$\rightarrow s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

برای محاسبه بردارهای ویژه داریم:

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

$$l_1=-1\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2=-v_1\\ \frac{1}{2}v_1-\frac{3}{2}v_2=-v_2\end{cases}\rightarrow v_1=v_2\rightarrow\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$l_2=-2\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2=-2v_1\\ \frac{1}{2}v_1-\frac{3}{2}v_2=-2v_2\end{cases}\rightarrow v_1=-v_2\rightarrow\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

بنابراین اگر شرایط اولیه $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ باشد، پاسخ سیستم برابر است با:

$$\vec{x}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

و اگر شرایط اولیه $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ باشد، پاسخ سیستم برابر است با:

$$\vec{x}(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

<

ج) روش کیلی همیلتون: قضیه کیلی همیلتون بیان می‌کند که هر ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می‌کند، لذا:

$$\Delta(l)=l^n+a_{n-1}l^{n-1}+\dots+a_1l+a_0=0$$
$$\rightarrow\Delta(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=0 \qquad (18\text{-}4)$$

که در آن ضرایب معادله مشخصه ماتریس A می‌باشند. از این قضیه می‌توان به گونه‌ای استفاده نمود تا هر تابع ماتریسی A را که به صورت تابعی چندجمله‌ای از A نمایش یافته است تعیین کنیم.

فرض کنید $N(A)$ تابعی چندجمله‌ای از ماتریس A باشد:

$$N(A)=A^m+c_{m-1}A^{m-1}+\dots+c_1A+c_0I$$
$$N(l)=l^m+c_{m-1}l^{m-1}+\dots+c_1l+c_0=0$$

اگر معادله مشخصه ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$\Delta(l)=l^n+a_{n-1}l^{n-1}+\dots+a_1l+a_0$$

آنگاه با تقسیم $N(l)$ بر $\Delta(l)$ داریم:

$$\frac{N(l)}{\Delta(l)}=F(l)+\frac{R(l)}{\Delta(l)}$$

که در آن $F(l)$ خارج قسمت و $R(l)$ باقیمانده این تقسیم خواهد بود؛ بنابراین:

$$N(l)=F(l)\Delta(l)+R(l)$$

$\Delta(l)$به ازای مقادیر ویژه A صفر می‌باشد بنابراین اگر l_i مقدار ویژه ماتریس A باشد:

$$N(l_i)=F(l_i)\underbrace{\Delta(l_i)}_{=0}+R(l_i)=R(l_i)$$

در نتیجه بر اساس قضیه کیلی همیلتون داریم:

$$N(A)=R(A) \qquad (19\text{-}4)$$

$$N^{(1)}(A)=R^{(1)}(A) \qquad (20\text{-}4)$$

که $R(A)$ باقیمانده تقسیم $N(A)$ بر $\Delta(A)$ و یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه $n-1$ (n درجه معادله مشخصه A) و ($\mathbf{l}$) نماد مشتق مرتبه $\mathbf{l}$ ام می‌باشد:

$$R(l)=a_0(t)+a_1(t)\,l+\ldots+a_{n-1}(t)\,l^n \qquad (21\text{-}4)$$

مثال 4-4

ماتریس A^{100} را محاسبه نمایید:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

ابتدا معادله مشخصه سیستم و مقادیر ویژه آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta(l)=\left|l\,I-A\right|=\left|l\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}l & 0\\ 0 & l\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}l & -1\\ 1 & l+2\end{vmatrix}=l^2+2l+1=(l+1)^2$$

$$\rightarrow l_{1,2}=-1$$

سپس تابع $N(l)$ را به صورت $N(l)=l^{100}$ تعریف می‌کنیم؛ بنابراین طبق 4-21 داریم:

$$\begin{cases}R(l)=a_0(t)+a_1(t)\,l\\ N(l)=l^{100}\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}N(l)=R(l)\rightarrow l^{100}=a_0(t)+a_1(t)\,l\\ N'(l)=R'(l)\rightarrow 100\,l^{99}=a_1(t)\end{matrix}$$

$$l=-1\rightarrow\begin{cases}(-1)^{100}=a_0(t)+a_1(t)(-1)=a_0(t)-a_1(t)=1\\ 100(-1)^{99}=a_1(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a_0(t)=-99\\ a_1(t)=-100\end{cases}$$

$$\rightarrow l^{100}=-99-100\,l$$

$$\rightarrow A^{100}=-99I-100A=-99\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-100\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-99 & -100\\ 100 & 101\end{pmatrix}$$

$<$

با این روش برای تعیین تابع انتقال حالت داریم:

$$N(A)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}=R(A)$$

مثال 4-5

ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را به دست آورید:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{pmatrix}$$

ابتدا معادله مشخصه سیستم و مقادیر ویژه آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta(l)=|lI-A|=\left|l\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6\\-1&-5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}l&0\\0&l\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6\\-1&-5\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}l&-6\\1&l+5\end{vmatrix}$$

$$=l^2+5l+6=(l+2)(l+3)$$

$$\rightarrow\begin{cases}l_1=-2\\l_2=-3\end{cases}$$

سپس تابع $N(l)$ را به صورت $N(l)=e^{lt}$ تعریف می‌کنیم؛ بنابراین طبق 4-21 داریم:

$$\begin{cases}R(l)=a_0(t)+a_1(t)\,l\\N(l)=e^{lt}\end{cases}\rightarrow N(l)=R(l)\rightarrow e^{lt}=a_0(t)+a_1(t)\,l$$

$$\begin{cases}l=-2\rightarrow e^{-2t}=a_0(t)-2a_1(t)\\l=-3\rightarrow e^{-3t}=a_0(t)-3a_1(t)\end{cases}$$

با مرتب‌سازی معادلات داریم:

$$\begin{cases}a_0(t)-2a_1(t)=e^{-2t}\quad(1)\\a_0(t)-3a_1(t)=e^{-3t}\quad(2)\end{cases}\xrightarrow{(1)-(2)}a_1(t)=e^{-2t}-e^{-3t}\rightarrow a_0(t)=3e^{-2t}-2e^{-3t}$$

$$\rightarrow j(t)=e^{At}=a_0(t)+a_1(t)A=a_0(t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a_1(t)\begin{pmatrix}0&6\\-1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0(t)&0\\0&a_0(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6a_1(t)\\-a_1(t)&-5a_1(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t}&0\\0&3e^{-2t}-2e^{-3t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6a_1(t)\\-(e^{-2t}-e^{-3t})&-5(e^{-2t}-e^{-3t})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t}&6(e^{-2t}-e^{-3t})\\-e^{-2t}+e^{-3t}&-2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{pmatrix}$$

<

د) استفاده از فرم قطری/بلوکی جردن: اگر ماتریس A به فرم قطری یا بلوکی جردن بیان شود، تابع $f(A)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$A=\begin{pmatrix}l_1&&&\\&l_2&0&\\&0&\mathbf{O}&\\&&&l_n\end{pmatrix}\rightarrow f(A)=\begin{pmatrix}f(l_1)&&&\\&f(l_2)&0&\\&0&\mathbf{O}&\\&&&f(l_n)\end{pmatrix}\qquad(22\text{-}4)$$

$$A=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&0&\\&0&\mathbf{O}&\\&&&J_n\end{pmatrix}\rightarrow f(A)=\begin{pmatrix}f(J_1)&&&\\&f(J_2)&0&\\&0&\mathbf{O}&\\&&&f(J_n)\end{pmatrix}\qquad(23\text{-}4)$$

که در آن:

$$J_i=\begin{pmatrix} l_i & 1 & & 0 \\ & l_i & \mathbf{O} & \\ & 0 & \mathbf{O} & 1 \\ & & & l_i \end{pmatrix} \to f\left(J_i\right)=\begin{pmatrix} f\left(l_i\right) & f'\left(l_i\right) & & 0 \\ & f\left(l_i\right) & \mathbf{O} & \\ & 0 & \mathbf{O} & f'\left(l_i\right) \\ & & & f\left(l_i\right) \end{pmatrix} \qquad (24\text{-}4)$$

می‌باشد. با استفاده از ماتریس‌های انتقال که در بخش اول معرفی گردید می‌توان ماتریس را به فرم قطری معادل تبدیل نمود:

$$A=T\Lambda T^{-1} \to e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1} \qquad (25\text{-}4)$$

مثال 4-6

ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را به دست آورید:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از مثال 1-9 و 1-10 داریم:

$$\begin{cases} l_1=-5 \\ l_2=1 \\ l_3=2 \end{cases} \to T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -0.1429 & 0.4286 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1429 & 0.5714 \end{pmatrix}$$

و با اعمال تبدیل 4-25 داریم[1]:

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -0.1429 & 0.4286 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1429 & 0.5714 \end{pmatrix}$$

---

[1] کد MATLAB مربوط به این مثال:

```
>> syms t
>> T=[0 1 0;-4 0 3;1 0 1]
T =
   0   1   0
  -4   0   3
   1   0   1
>> T*diag([exp(-5*t),exp(t),exp(2*t)])*T^-1
ans =
[ exp(t),                0,                   0]
[   0, (3*exp(2*t))/7 + 4/(7*exp(5*t)), (12*exp(2*t))/7 - 12/(7*exp(5*t))]
[   0,   exp(2*t)/7 - 1/(7*exp(5*t)),  (4*exp(2*t))/7 + 3/(7*exp(5*t))]
>> pretty(ans)
 +-                                  -+
 | exp(t),      0,             0       |
 |                             |
 |      3 exp(2 t)    4     12 exp(2 t)     12    |
 |   0, ---------- + ----------, ----------- - ---------- |
 |          7     7 exp(5 t)      7      7 exp(5 t) |
 |                             |
 |       exp(2 t)    1      4 exp(2 t)     3    |
 |   0, -------- - ----------,  ---------- + ---------- |
 |          7     7 exp(5 t)      7      7 exp(5 t) |
 +-                                  -+
```

$$=\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7}\left(3e^{2t}+4e^{-5t}\right) & \frac{12}{7}\left(e^{2t}-e^{-5t}\right) \\ 0 & \frac{1}{7}\left(e^{2t}-e^{-5t}\right) & \frac{1}{7}\left(4e^{2t}+3e^{-5t}\right) \end{pmatrix}$$

<

مثال 4-7

ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را به دست آورید:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از مثال 1-9 داریم:

$$l_{1,2,3}=1\rightarrow T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و با اعمال تبدیل 4-25 داریم[1]:

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ te^t & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

<

4-4- تبدیل‌های همانندی:

علیرغم نکات مثبت معادلات حالت در نمایش سیستم ها در قیاس با ماتریس تبدیل $G(s)$ یک از نقایض این نمایش منحصر بفرد بودن آن است؛ یعنی ممکن است برای یک سیستم واحد $G(s)$ بتوان چندین معادله حالت نوشت. تفاوت این معادلات به علت آزادی انتخاب متغیرهای حالت در سیستم می‌باشد. حتی تعداد متغیرهای حالت نیز می‌تواند بیش از درجه سیستم اختیار شود. در بسیاری از مواقع مناسب است متغیرهای حالت یا سیستم مختصات مناسبی را اختیار نمود که عملیات ماتریسی را ساده و تسریع نماید. به عنوان مثال برای به دست آوردن e^{At} اگر ماتریس A را قطری نماییم، با سهولت بیشتری می‌توان عملیات ماتریسی را دنبال نمود. تبدیل مختصات در سیستم ها توسط تبدیل‌های همانندی صورت می‌پذیرد.

---

[1] کد MATLAB مربوط به این مثال:

```
>> syms t
>> T=[0 1 0;0 1 1;1 0 0]
T =
   0   1   0
   0   1   1
   1   0   0
>> T*[exp(t) t*exp(t) 0;0 exp(t) 0;0 0 exp(t)]*T^-1
 ans =
 [  exp(t),    0,    0]
[     0, exp(t),    0]
[ t*exp(t),    0, exp(t)]
```

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+B\vec{r}(t)\\ \vec{y}(t)=C\vec{x}(t)+D\vec{r}(t)\end{cases}$$

تبدیل همانندی T و متغیر جدید $\vec{z}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{z}(t)&=T^{-1}\vec{x}(t)\\ \vec{x}(t)&=T\vec{z}(t)\end{aligned} \qquad (26\text{-}4)$$

$\vec{z}$ ترکیب خطی از $\vec{x}$ می‌باشد بنابراین ماتریس T ثابت و نا ویژه خواهد بود. اکنون معادلات حالت را با متغیر جدید بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}T\dot{\vec{z}}(t)=AT\vec{z}(t)+B\vec{r}(t)\\ \vec{y}(t)=CT\vec{z}(t)+D\vec{r}(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{z}}(t)=T^{-1}AT\vec{z}(t)+T^{-1}B\vec{r}(t)\\ \vec{y}(t)=CT\vec{z}(t)+D\vec{r}(t)\end{cases} \qquad (27\text{-}4)$$

بنابراین با استفاده از روابط فوق از یک معادله به معادله دیگر می‌توان رسید.

چرا این تبدیل را همانندی می‌نامند؟ اگر تابع تبدیل معادلات جدید را به دست آوریم خواهیم داشت:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$G_{new}(s)=CT\left(sI-T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}B+D$$

$$sI-T^{-1}AT=sT^{-1}T-T^{-1}AT=T^{-1}(sI-A)T$$

$$\rightarrow\left(sI-T^{-1}AT\right)^{-1}=\left(T^{-1}(sI-A)T\right)^{-1}=T^{-1}(sI-A)^{-1}T \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

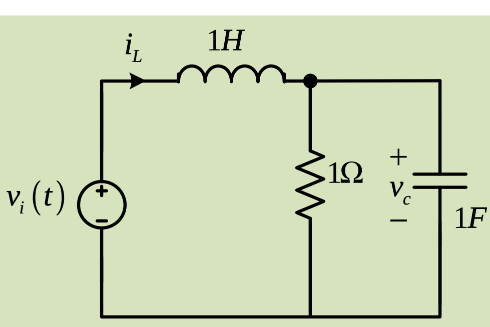
$$\rightarrow G_{new}(s)=CT\left(sI-T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}B+D=C\underbrace{TT^{-1}}_{I}(sI-A)^{-1}\underbrace{TT^{-1}}_{I}B+D$$

$$=C(sI-A)^{-1}B+D=G(s)$$

این بدین معناست که با این تبدیل مختصات ماتریس تبدیل سیستم تغییری نمی‌کند؛ بنابراین کلیه خصوصیات اصلی سیستم از جمله معادله مشخصه، قطب‌ها و صفرها و... با این تبدیل تغییری نخواهند کرد. دقت کنید که T^{-1} نیز خود تبدیل همانندی می‌باشد.

مثال 4-3

در مدار زیر با تغییر متغیرهای حالت به جریان حلقه‌ها معادلات حالت جدید را به دست آورید:

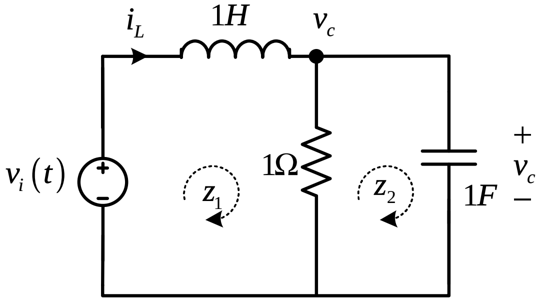


$$\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}i_L\\ v_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}v(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

ابتدا متغیرهای جدید سیستم را تعیین می‌کنیم:



$$\begin{cases} i_L = x_1 = z_1 \\ i_R = \dfrac{v_C}{1} = x_2 \to z_1 - z_2 = i_R = x_2 \end{cases} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\to T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از 4-27 داریم:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}AT} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{T^{-1}B} v(t) \\ y(t) = \underbrace{(1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{CT} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \to \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

<

4-5- قطری سازی معادلات حالت (فرم جردن)

4-5-1- فرم قطری ماتریس

در حالت خاصی که ماتریس A دارای n مقدار ویژه متمایز باشد و یا بتوان n بردار ویژه مستقل برای آن یافت، ماتریس A را می‌توان به حالت قطری کامل تبدیل نمود. فرض کنید $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ بردارهای ویژه ماتریس A باشند. در این صورت:

$$T = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \ldots. \quad \vec{v}_n) \tag{28-4}$$

ماتریس T تبدیل همانندی است که سیستم را به فرم قطری تبدیل می‌کند. در این حالت:

$$x = T.z = z_1\vec{v}_1 + z_2\vec{v}_2 + \ldots. + z_n\vec{v}_n \tag{29-4}$$

معکوس ماتریس T نیز تبدیل همانندی است که آن را می‌توان به صورت بردارهای سطری W_iنوشت:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{w}_1^T \\ \vec{w}_2^T \\ \vdots \\ \vec{w}_n^T \end{pmatrix} \tag{30-4}$$

با توجه به اینکه $T^{-1}T = I$ می‌باشد داریم:

$$T^{-1}T=\begin{pmatrix}\vec{w}_1^T\vec{v}_1 & \vec{w}_1^T\vec{v}_2 & \cdots & \vec{w}_1^T\vec{v}_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vec{w}_n^T\vec{v}_1 & \vec{w}_n^T\vec{v}_2 & \cdots & \vec{w}_n^T\vec{v}_n\end{pmatrix}=I_{n\times n} \qquad (31\text{-}4)$$

این بدان معنا است که این بردارها متناظراً بر هم عمودند:

$$\vec{w}_i^T\vec{v}_j=\begin{cases}1 & if \quad i=j\\ 0 & if \quad i\neq j\end{cases} \qquad (32\text{-}4)$$

می‌توان نشان داد که w_i نیز بردارهای ویژه ماتریس A^T می‌باشند که متناظر با مقدار ویژه λ_i می‌باشند. حال نشان می‌دهیم که ماتریس $T^{-1}AT$ قطری می‌باشد:

$$\begin{aligned}A.T&=A(\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n)\\ &=(A\vec{v}_1 \quad A\vec{v}_2 \quad \cdots \quad A\vec{v}_n)\\ &=(s_1\vec{v}_1 \quad s_2\vec{v}_2 \quad \cdots \quad s_n\vec{v}_n)\end{aligned}$$

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\vec{w}_1^T\\ \vdots\\ \vec{w}_n^T\end{pmatrix}(\lambda_1\vec{v}_1 \quad \lambda_2\vec{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\vec{v}_n)=\left(\lambda_j\vec{w}_i^T\vec{v}_i\right)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad (33\text{-}4)$$

دقت کنید:

$$T^{-1}B=\begin{pmatrix}\vec{w}_1^TB\\ \vdots\\ \vec{w}B\end{pmatrix}, C.T=(C\vec{v}_1 \quad C\vec{v}_2 \quad \cdots \quad C\vec{v}_n) \qquad (34\text{-}4)$$

لذا معادلات حالت به فرم قطری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}\dot{\vec{z}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}\vec{z}+\begin{pmatrix}\vec{w}_1^TB\\ \vec{w}_2^TB\\ \vdots\\ \vec{w}_n^TB\end{pmatrix}\vec{r}\\ y=(C\vec{v}_1 \quad C\vec{v}_2 \quad \cdots \quad C\vec{v}_n)\vec{z}+D\vec{r}\end{cases} \qquad (35\text{-}4)$$

مثال 4-4

با انتخاب ماتریس تبدیل مناسب مدل حالت سیستمی با معادلات زیر را به فرم قطری تبدیل کنید.

$$\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}u$$
$$y=(3 \quad 1)\vec{x}$$

چون سیستم جدید باید دارای ماتریس قطری باشد پس باید ماتریس مودال را به دست آوریم. برای این کار ابتدا مقادیر ویژه را محاسبه می‌کنیم.

$$\det(\lambda I-A)=0\rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-3$$

$$Av_i = s_i v_i$$

$$i=1 \to Av_1 = s_1 v_1 \to Av_1 = v_1$$

$$i=2 \to Av_2 = s_2 v_2 \to Av_2 = -3v_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2v_{11} - v_{12} = v_{11} \to v_{11} = v_{12} \\ 5v_{11} - 4v_{12} = v_{12} \to 5v_{11} = 5v_{12} \to v_{11} = v_{12} \end{cases} \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2v_{21} - v_{22} = -3v_{21} \to 5v_{21} = v_{22} \\ 5v_{21} - 4v_{22} = -3v_{22} \to 5v_{21} = v_{22} \end{cases} \to v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \to T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} \hat{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \hat{C} = CT = \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix} \end{cases} \to \begin{cases} \dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\vec{z} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{r} \\ y = \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix}\vec{z} \end{cases}$$

<

بخش پنجم:

رؤیت پذیری و کنترل پذیری سیستم های LTI

3 بخش پنجم: رؤیت پذیری و کنترل‌پذیری سیستم‌های LTI

5-1- رؤیت پذیری:

5-1-1- مقدمه:

همانگونه که قبلاً اشاره شد، متغیر حالت $\vec{x}(t_f)$ در هر لحظه t_f کلیه اطلاعات مورد نیاز از ورودی‌های قبلی را در خود اندوخته است و پاسخ سیستم از زمان t_f به بعد، با دانستن این متغیر مشخص می‌شود. این رابطه‌ای که متغیر حالت بین ورودی و خروجی برقرار ساخته است، علیرغم ساده‌سازی عملیات طراحی کنترل‌کننده و امکان استفاده وسیع کامپیوتر و روش‌های عددی در آن، می‌تواند این مشکل را داشته باشد که اولاً یکتا نبوده و ثانیاً ارتباط یک به یکی با ورودی و خروجی نداشته باشد. به عنوان مثال اگر سیستمی را که تنها با دو متغیر حالت می‌توان معادلات دینامیکی آن را تحلیل نمود، توسط سه متغیر حالت نمایش دهیم، مسلماً ارتباط یک به یک متغیر حالت به ورودی یا خروجی مخدوش خواهد شد. بررسی ارتباط متغیر حالت و خروجی را با اپراتور رؤیت پذیری می‌سنجند. به همین ترتیب ارتباط بین ورودی و متغیر حالت را با اپراتور کنترل‌پذیری بررسی می‌نماییم. در این راستا مفاهیم مختلف یک به یک و پوشا بودن این اپراتور ریاضی را در قالب تعابیر فیزیکی قابل‌فهم تعبیر می‌کنیم.

5-1-2- تعریف رؤیت پذیری

یک سیستم LTI رؤیت پذیر نامیده می‌شود، اگر شرایط اولیه متغیرهای حالت $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ را بتوان به صورت یکتا از اطلاعات مربوط به $\vec{y}(t)$ و $\vec{r}(t)$ در محدوده زمانی $\mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}],\mathrm{T}>0$ تعیین نمود.

در تعریف فوق نکات زیر مهم می‌باشند: اولاً تنها تعیین $\vec{x}_0$ لحاظ شده است اما با توجه به بحث‌های فصل گذشته با شناخت سیستم و تعیین ماتریس انتقال حالت $j(t)$، در صورتی که $\vec{x}_0$ تعیین شود $\vec{x}(t)$ نیز به راحتی و به صورت یکتا برای کلیه زمان‌ها $(\forall t)$، قابل تعیین خواهد بود. برای اینکه این موضوع را نشان دهیم رابطه (4-10) را به ازای $t_0=0$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\vec{x}(t)=e^{At}\vec{x}_0+\int_0^t e^{A(t-t)}B\vec{r}(t) \qquad (5\text{-}1)$$

با مشخص بودن $\vec{x}_0$ و اعمال $\vec{r}(t)$ در معادله فوق، $\vec{x}(t)$ تعیین خواهد شد. دقت کنید خروجی سیستم براساس معادله (4-11) در حالت کلی برابر است با:

$$\vec{y}(t)=Ce^{At}\vec{x}_0+\int_0^t Ce^{A(t-t)}B\vec{r}(t)+D\vec{r}(t) \qquad (5\text{-}2)$$

قسمت‌های مربوط به خروجی با شرایط اولیه صفر $\vec{y}_{zs}$، می‌توانند بدون اطلاع از شرایط اولیه محاسبه شوند، پس در بحث رؤیت پذیری وارد نشده و تنها پاسخ همگن یا $\vec{y}_{zi}$ در این تعریف مبنای بررسی‌ها قرار می‌گیرد.

$$\vec{y}_{zi}(t)=Ce^{At}\vec{x}_0 \qquad (5\text{-}3)$$

چرا که تنها این جزء تابعی از $\vec{x}_0$ می‌باشد. تعریف قبل با اینکه مفهوم رؤیت پذیری را کاملاً آشکار می‌سازد، اما ابزار مناسبی برای تعیین رؤیت پذیری نمی‌باشد. تعریف زیر حالت رؤیت ناپذیر را که به صورت ساده‌تری قابل محاسبه است را معرفی می‌نماید.

تعریف متغیر حالت رؤیت ناپذیر:

متغیر حالت $\vec{x}^* \neq 0$ رؤیت ناپذیر خوانده می‌شود، اگر پاسخ همگن یا بدون ورودی $\vec{y}_{zi}(t)$ با شرایط اولیه $\vec{x}(0)=\vec{x}^*$ برای کلیه زمان‌ها $\forall t \geq 0$، کاملاً صفر باقی بماند.

از لحاظ ریاضی در صورتی که بتوان $\vec{x}^* \neq 0$ یافت که

$$if\ \exists \vec{x}^* \neq 0 \quad \ni \quad \vec{y}_{zi}(t)=Ce^{At}\vec{x}^* \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

در این صورت این متغیر حالت رؤیت ناپذیر خواهد بود و در صورتی که هیچ حالتی این معادله را برقرار نکند، حالت رؤیت ناپذیر وجود نخواهد داشت و سیستم رؤیت پذیر خواهد بود.

قضیه رؤیت پذیری:

یک سیستم LTI (و به اختصار زوج (A,C)) رؤیت پذیر است، اگر و تنها اگر هیچ متغیر حالت رؤیت ناپذیر نداشته باشد.

5-1-3- تستهای رؤیت پذیری:

تاکنون بدین نتیجه رسیدیم که $\vec{x}_0$ را به گونه‌ای جستجو کنیم که $Ce^{At}\vec{x}_0$ را صفر کند؛ اما این جستجو معمولاً مشکل است و بهتر است از روش‌های جبر خطی و فضاهای پوچی و... . در این جستجو بهره ببریم. مجدداً قضیه کیلی-همیلتون را یادآوری می‌کنیم. سیستم خطی A با معادله مشخصه زیر در نظر بگیرید:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

در این صورت ماتریس A در معادله مشخصه خود صدق می‌کند یعنی:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 = 0 \tag{4-5}$$

قضیه شرایط رؤیت پذیری:

بردار $\vec{x}^*$ یک متغیر رؤیت ناپذیر است، اگر و تنها اگر

$$O:\vec{x}^* = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}\vec{x}^* = 0 \tag{5-5}$$

که در آن O، ماتریس رؤیت پذیری[1] نامیده می‌شود. در صورتی که $rank(O) < n$ باشد می‌توان $\vec{x}^* \neq 0$ را پیدا نمود که در شرط فوق صدق کند.

مثال 5-1

آیا سیستم زیر رؤیت پذیر است:

[1] Observability Matrix

$$A=\begin{pmatrix}\frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\end{pmatrix}$$

$$O=\begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

رتبه کامل ندارد: $rank(O)=1$

سیستم رؤیت ناپذیر است، اما متغیر رؤیت ناپذیر چیست؟

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix}=0 \rightarrow x^{*}=a\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

اگر هر دو متغیر حالت برابر باشند اندازه‌گیری انجام شده قادر به شناخت آن نخواهد بود.

<

۷ قضیه شرط بردار ویژه

سیستم (A,C) رؤیت ناپذیر است، اگر و تنها اگر بردار ویژه $\vec{v}_i$ در A وجود داشته باشد که $C\vec{v}_i=0$ گردد.

مثال 5-2

آیا سیستم زیر رؤیت پذیر است:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$$

$l_1=-1 \Rightarrow \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow C\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=0$ مود رؤیت ناپذیر

$l_2=-2 \Rightarrow \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow C\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\neq 0$ مود رؤیت پذیر

$l_1=-1$ مربوط به مود رؤیت ناپذیر می‌باشد.

<

5-1-4- زیر فضای رؤیت ناپذیر:

همانگونه که تاکنون در مورد روش‌های تشخیص رؤیت پذیری بیان شد، رؤیت ناپذیری مربوط به نحوه تشکیل بردار $\vec{x}(0)$ و یا بردار ویژه‌ای از ماتریس A یا e^{A} می‌شود که $C\vec{v}_i=0$ گردد. بدین ترتیب مودهای رؤیت پذیر و رؤیت ناپذیر از یکدیگر قابل تفکیک بوده و امکان شناسایی حالتی که توسط خروجی رؤیت پذیر نیست با این جداسازی قابل انجام است. زیر فضای رؤیت پذیر از پوشش فضایی بردارهای ویژه مودهای رؤیت پذیر تشکیل شده و زیر فضای رؤیت ناپذیر از پوشش فضایی بردارهای ویژه

مودهای رؤیت ناپذیر تشکیل می‌شوند. این زیر فضاها با ماتریس رؤیت پذیری O نیز ارتباط دارند. می‌توان نشان داد زیر فضای رؤیت ناپذیر سیستم همان فضای پوچی[1] ماتریس رؤیت پذیری O می‌باشد.

$$O=\begin{pmatrix} Cx \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

برای جداسازی فضای رؤیت پذیر و رؤیت ناپذیر کافی است تبدیل همانندی بیابیم که مودهای رؤیت پذیر را از مودهای رؤیت ناپذیر تفکیک کنند؛ اما این همان تبدیل همانندی است که در فرم عمومی جردن به آن اشاره شده است. به عنوان مثال فرض کنید سیستم A دارای سه مقدار ویژه l_1, l_2, l_3 باشد که مود مربوط به l_2 در آن رؤیت ناپذیر است. در این صورت با تشکیل تبدیل همانندی زیر:

$$T=[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_3 \mid \vec{v}_2]$$

مودهای رویت پذیر　　　　مود رویت ناپذیر

می‌توان ماتریس A را به فرم قطری زیر تبدیل نمود.

$$T^{-1}AT=\Lambda=\left(\begin{array}{cc|c} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & l_2 \end{array}\right)$$

در این صورت متغیرهای اول و دوم $\vec{z}$ یعنی z_1, z_2 که از تبدیل $\vec{z}(t)=T\vec{x}(t)$ به دست می‌آیند مربوط به مودهای رؤیت پذیر بوده و متغیر z_2 مربوط به رؤیت ناپذیر می‌باشند. در حالت کلی ماتریس سیستم تغییریافته به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}}(t)=\left(\begin{array}{c|c} A'_{11} & 0 \\ \hline A'_{21} & A'_{22} \end{array}\right)\vec{z}(t)+\begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{pmatrix}\vec{r}(t) \\ \vec{y}(t)=\left(C'_1 \mid 0\right)\vec{z}(t)+D\vec{r}(t) \end{cases} \qquad (6\text{-}5)$$

$$\rightarrow z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \hline z_2 \end{pmatrix}$$

که به آن فرم کانونیکال رؤیت پذیری می‌گوییم و در آن z_1 مربوط به مودهای رؤیت پذیر بوده و z_2 مربوط به مودهای رؤیت ناپذیر می‌باشند. مسلماً تبدیل همانندی یکتا نبوده و تبدیل‌های دیگری نیز که این کار را انجام دهند، وجود دارد. ولی برای کلیه تبدیل‌های همانندی از خواص T می‌دانیم که مودهای رؤیت پذیر و رؤیت ناپذیر را به نمایش دیگری تبدیل می‌کند، ولی تغییری در رفتار دینامیکی سیستم ایجاد نخواهد کرد.

مثال 5-3

زیر فضای رؤیت پذیر را در سیستم‌های زیر جدا کنید:

[1] Null Space

$$1)\ \begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} \end{cases}$$

ابتدا شرط رؤیت پذیری را چک می‌کنیم:

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rank(O) = 2$$

سیستم رؤیت ناپذیر است. اکنون شرط بردار ویژه را چک می‌کنیم:

$$l_1 = 0 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{رویت پذیر}$$

$$l_2 = -1 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{رویت پذیر}$$

$$l_3 = -3 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{رویت پذیر}$$

$$T = \left(\vec{v}_1 \quad \vec{v}_3 \ \vdots\ \vec{v}_2\right) = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}} = T^{-1}AT.\vec{x} + T^{-1}B.\vec{r} \\ \vec{y} = CT.\vec{x} \end{cases}$$

$$T^{-1}AT = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -27 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad CT = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{z}} = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\vec{z} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\vec{r} \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\vec{z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{1}{3}\vec{r} \\ \dot{z}_2 = -3z_2 + \frac{1}{6}\vec{r} \\ \dot{z}_3 = -z_3 + \frac{1}{2}\vec{r} \end{cases} \rightarrow y = 2(z_1 + z_2)$$

$$2)\ \begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_1 \\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} \end{cases}$$

ابتدا شرط رؤیت پذیری را چک می‌کنیم:

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow rank(O) = 2$$

سیستم رؤیت ناپذیر است. اکنون شرط بردار ویژه را چک می‌کنیم:

$$l_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Cv_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$ رویت ناپذیر

$$l_2 = 1 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Cv_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \rightarrow$$ رویت پذیر

$$l_3 = 1 \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Cv_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$ رویت ناپذیر

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$CT=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{\vec{z}}=T^{-1}AT.\vec{x}+T^{-1}B.\vec{r}\\ \vec{y}=CT.\vec{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{z}}=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right)\vec{z}+\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\vec{r}\\ y=\begin{pmatrix}-1&0&0\end{pmatrix}\vec{z}\end{cases}$$

<

5-1-5- آشکار پذیری:

در بسیاری از حالت‌ها، رؤیت ناپذیری مشکل جدی بهم نمی زند، در صورتی که مودهای رؤیت ناپذیر که بر روی آن‌ها هیچ نظارت خارجی وجود ندارد، پایدار باقی بمانند یا به تعبیر دیگر هیچ‌گاه به سمت بی‌نهایت میل نکنند.

- **تعریف آشکار پذیری:**

سیستمی را آشکار پذیر می‌گویند، اگر کلیه مودهای ناپایدار سیستم رؤیت پذیر باشند.

- **توجه:**

مودهای ناپایدار عبارت از مودهایی هستند که مقادیر ویژه آن‌ها دارای قسمت حقیقی غیر منفی $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0$ باشد و یا در صفحه بسته سمت راست قرار گیرند.

شرط آشکار پذیری ضعیف‌تر از شرط رؤیت پذیری است. قطعاً یک سیستم رؤیت پذیر آشکار پذیر می‌باشد. ولی سیستمهای آشکار پذیری وجود دارند که رؤیت پذیر نمی‌باشند. تکیه بیشتر مهندسین در توجه به مودهای ناپایدار سیستم و نحوه تأثیر آن بر دینامیک کل سیستم می‌باشد. لذا اگر شرط آشکار پذیری وجود داشته باشد حداقل مورد نیاز برای طراحی کنترل‌کننده و رؤیت گر مناسب ایجاد خواهد شد.

5-2- کنترل‌پذیری:

5-2-1- تعریف کنترل‌پذیری:

مفهوم کنترل‌پذیری بسیار مشابه با رؤیت پذیری است با این تفاوت که در این ایده مهم ارتباط ورودی $\vec{r}$ و متغیر حالت $\vec{x}$ را بررسی می‌کنیم. در واقع بررسی کنترل‌پذیری بدین معنا است که توانایی کنترل $\vec{r}$ (یا نحوه چیدمان عملگرها) در تأثیرگذاری در کلیه عناصر متغیر حالت $\vec{x}$ را بررسی کنیم.

- **تعریف کنترل‌پذیری:**

سیستمی را کنترل‌پذیر می‌نامیم که به ازای هر متغیر حالت x_1 در زمان $T>0$ تابع $\vec{r}(t)$ در بازه زمانی $0<t<T$ را بتوان چنان یافت که سیستم از شرایط اولیه $\vec{x}_0=0$ در زمان صفر بتواند به شرایط x_1 در زمان T برسد.

این تعریف به نظر محدود کننده است چرا که از شرایط اولیه صفر شروع کرده‌ایم $\vec{x}_0 = 0$؛ اما این‌گونه نیست چرا که می‌توان نشان داد اگر سیستم شرایط این تعریف را ارضاء کند، از هر شرط اولیه غیر صفری می‌توان به شرایط مطلوب، x_1 در زمان غیر صفر T دسترسی پیدا کند:

$$\vec{x}(t_0+T) = e^{AT}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+T-t)}B\vec{r}(t)dt \tag{7-5}$$

با تغییر متغیر محدوده انتگرال‌گیری $t' = t - t_0$

$$e^{A(t_0+T-t)}B\vec{r}(t)dt = \int_0^T e^{(T-t')}B\vec{r}(t_0+t')dt' \tag{8-5}$$

اگر $v(t') = u(t_0+t')$ قرار دهیم، این انتگرال پاسخ بدون شرایط اولیه سیستم در زمان $t = T$ خواهد بود. لذا در صورتی که سیستم کنترل‌پذیر باشد، می‌توان $\vec{r}(t)$ را به گونه‌ای یافت که این انتگرال به هر مقدار دلخواهی همگرا شده و لذا محدودیتی در تعریف وجود ندارد. این بدان معنا است که برای بررسی کنترل‌پذیری کافی است به پاسخ‌های بدون شرایط اولیه یا پاسخ خصوصی معادلات دیفرانسیل توجه کنیم.

5-2-2- حالت‌های کنترل ناپذیر و کنترل‌پذیری

- **تعریف**: **حالت کنترل ناپذیر**

حالت $\vec{x}^* \neq 0$ را کنترل ناپذیر می‌نامیم اگر پاسخ خصوصی $\vec{x}_{zs}(t)$ در کلیه زمان‌ها $\forall t$ و کلیه ورودی‌ها $\vec{r}$ عمود بر حالت $\vec{x}^*$ باشد.

که در آن عمود بودن دو بردار بدان معنا است که ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد. به صورت ریاضی این شرط برابر است با:

$$\left.\begin{matrix}\forall t\\ \forall u\end{matrix}\right| \Rightarrow \vec{x}^{*T}\int_0^t e^{At}B\vec{r}(t-t)dt = \int_0^t \vec{x}^{*T}e^{At}B\vec{r}(t-t)dt = 0 \tag{9-5}$$

این تنها در صورتی برقرار خواهد شد که:

$$\forall t \rightarrow \vec{x}^{*T}e^{At}B = 0 \tag{10-5}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود این شرط بسیار مشابه با $Ce^{At}\vec{x}^* = 0$ شرط رؤیت پذیری است. در واقع اگر به جای B از B^T استفاده شود در واقع این شرط ترانهاده شرط رؤیت پذیری است.

- **قضیه**:

یک سیستم LTI (یا زوج (A,B)) کنترل‌پذیر است، اگر و تنها اگر هیچ حالت کنترل ناپذیر نداشته باشد.

5-2-3- تستهای کنترل‌پذیری:

تستهای کنترل‌پذیری به صورت مشابه و به موازات تستهای رؤیت پذیری قابل تعمیم خواهند بود. با توجه به اینکه ترانهاده معادله کنترل‌پذیری $B^Te^{A^Tt}\vec{x}^* = 0$ دقیقاً مشابه شرط رؤیت پذیری برای سیستم دوگان زیر است:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}} = A^T\vec{x}\\ \vec{y} = B^T\vec{x}\end{cases} \tag{11-5}$$

لذا کلیه قضایای رؤیت پذیری را می‌توان به فرم مشابه به کنترل‌پذیری تعمیم داد. به عنوان مثال تست اول رؤیت پذیری به فرم زیر می‌باشد.

$$\begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ B^T (A^T)^2 \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} \vec{x}^* = 0 \tag{12-5}$$

یا ترانهاده آن

$$\vec{x}^{*T} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = 0 \tag{13-5}$$

لذا سیستم یا زوج (A, B) کنترل‌پذیر است اگر $\vec{x}^* \neq 0$ وجود نداشته باشد که در معادله فوق صدق نماید یا به عبارت دیگر:

$$rank(C) = rank\begin{pmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n \tag{14-5}$$

رتبه ماتریس کنترل‌پذیری C بایستی n باشد تا سیستم کنترل‌پذیر باشد.

شرط بردارهای ویژه نیز به صورت مشابه قابل پیاده‌سازی است. بدین ترتیب که زوج (A, B) کنترل‌پذیر نمی‌باشد اگر و تنها اگر بردار ویژه $\vec{w}$ از ماتریس A^T وجود داشته باشد که در معادله $B^T \vec{w} = 0$ صدق کند. اگر چنین بردار ویژه‌ای وجود داشته باشد $\vec{w}_i$ مود مربوطه را مود کنترل ناپذیر می‌نامیم.

مثال 5-4

برای سیستم زیر شرط کنترل‌پذیری را چک نمایید و حالت کنترل ناپذیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, rank(C) = 1 \rightarrow \text{کنترل ناپذیر}$$

$$\begin{pmatrix} a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a & -a \end{pmatrix} \rightarrow \text{حالت کنترل ناپذیر}$$

از شرط بردار ویژه نیز همین نتیجه حاصل می‌شود: مود کنترل ناپذیر 2− و حالت کنترل ناپذیر

$$l_i(A^T) = -2 \rightarrow \vec{v}_i = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$$

<

5-2-5- پایداری پذیری:

مشابه با آشکار پذیری، می‌توان پایدار پذیری را به صورت زیر تعریف نمود:

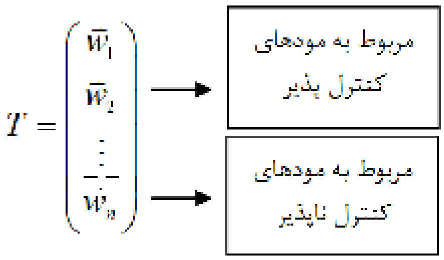
۷ تعریف پایدار پذیری:

سیستمی پایدار پذیر است، اگر کلیه مودهای ناپایدار آن کنترل‌پذیر باشند.

این شرط نیز از کنترل‌پذیری کامل ضعیف تر است و تنها کافی است مودهای ناپایدار سیستم کنترل‌پذیر باشد. بدین ترتیب سیستم‌های پایدار همواره شرط پایداری پذیری را دارا می‌باشند. همچنین سیستم‌های کنترل ناپذیری موجودند که به دلیل اینکه مودهای کنترل ناپذیر آن‌ها پایدارند، جزء دسته پایداری پذیر قرار می‌گیرند.

6-2-5- زیر فضای کنترل‌پذیر:

مشابه با حالت رؤیت پذیری، زیر فضای کنترل‌پذیر را می‌توان با تشکیل تبدیل همانندی که مودهای کنترل‌پذیر را در ابتدا و مودهای کنترل ناپذیر را در انتها در بر می‌گیرند تشکیل داد.



(15-5)

با ضرب این تبدیل همانندی در متغیر حالت می‌توان زیر فضاهای کنترل‌پذیر و کنترل ناپذیر را از یکدیگر تفکیک نمود.

$$\dot{\vec{z}} = \left(\begin{array}{c|c} A'_{11} & A'_{12} \\ \hline 0 & A'_{22} \end{array}\right) \vec{z} + \begin{pmatrix} B'_1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \vec{r}(t) \qquad (16\text{-}5)$$

بدین ترتیب سیستمی پایدار است اگر و تنها اگر A'_{22} پایدار مجانبی باشد.

بخش ششم:

تحقق سیستمهای LTI

3 بخش ششم: تحقق سیستم‌های LTI:

6-1- تحقق سیستمهای LTI:

تابع تبدیل، نمایش یکتایی از دینامیک ورودی و خروجی یک سیستم LTI می‌باشد، در صورتی که این رابطه دینامیکی با تعداد نامحدودی معادله حالت قابل تفسیر و تعبیر است. هر یک از معادلات حالت که مفسر دیفرانسیلی یک تابع تبدیل باشد، یک تحقق برای آن تابع تبدیل نامیده می‌شود. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = -\vec{x} + \vec{r} \\ \vec{y} = \vec{x} \end{cases} \qquad (1\text{-}6)$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = -\vec{x} + a.\vec{r} \\ \vec{y} = \dfrac{1}{a}\vec{x} \end{cases} \qquad (2\text{-}6)$$

هر دو محقق کننده یک تابع تبدیل $\dfrac{1}{s+1}$ می‌باشند.

- **تعریف تحقق:**

یک معادله حالت-خروجی $\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{r}(t) \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{r}(t) \end{cases}$ یک تحقق برای تابع تبدیل $H(s)$ است اگر:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

حال می‌توان ارتباط مشخصی بین $H(s)$ و اجزای سیستم حالت به دست آورد و امکان وجود تحقق و یکتایی و عدم یکتایی آن را بررسی نمود. می‌توان نشان داد که معادلات حالت تحقق، توابع تبدیل گویایی می‌باشند که سره یا اکیداً سره می‌باشند. بدین معنی که در نمایش تابع تبدیلی آن‌ها درجه صورت کوچک‌تر یا مساوی درجه مخرج است. با توجه به اینکه:

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = D \qquad (3\text{-}6)$$

در صورتی که $D \neq 0$ باشد تابع تبدیل $H(s)$ سره خواهد بود. لذا تابع تبدیل سره را می‌توان با تقسیم مستقیم صورت و مخرج به فرم زیر:

$$H(s) = \hat{H}(s) + D \qquad (4\text{-}6)$$

تبدیل نمود و تحقق $\hat{H}$ را می‌توان با فرم کلی:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{r}(t) \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) \end{cases} \qquad (5\text{-}6)$$

به دست آورد؛ بنابراین بدون از دست دادن عمومیت مسئله می‌توان سیستمهای مورد بحث را به سیستمهای اکیداً سره محدود نمود. در هر حال قضیه وجود تحقق به صورت زیر بیان می‌شود.

- **قضیه وجود تحقق:**

یک ماتریس تبدیل $H(s)$ را می‌توان به صورت معادلات فضای حالت تحقق داد، اگر و تنها اگر $H(s)$ ماتریس گویای سره (یا اکیداً سره) باشد.

5-2- تحقق کاهش ناپذیر:

یکی از مشخصه‌های مهم تحقق، کاهش ناپذیر بودن رتبه معادلات حالت می‌باشد. همانگونه در این بخش نشان داده خواهد شد این مشخصه با خواص کنترل‌پذیری و رؤیت پذیری سیستم در ارتباط است. ابتدا اجازه دهید با یک مثال ایده تحقق کاهش ناپذیر را بررسی کنیم، تحقق تابع تبدیل $\frac{1}{s+1}$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + r \\ y = x_1 \end{cases} \qquad (6\text{-}6)$$

تحقق دیگری برای سیستم نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + r \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (7\text{-}6)$$

برای مشاهده سریع این برابری کافی است به تعریف تابع تبدیل یک سیستم رجوع کنیم. همانگونه که قبلاً گفته شد تابع تبدیل سیستم رابطه بین خروجی و ورودی در حالت شرایط اولیه صفر (zs) می‌باشد. با در نظر گرفتن معادلات حالت دوم، پاسخ شرط اولیه x_2 در کلیه زمان‌ها صفر است چرا که در این معادله r تأثیر مستقیم ندارد. لذا با این توصیف هر دو معادله حالت به یک تابع تبدیل $\frac{1}{s+1}$ تبدیل خواهند شد.

حال دقت کنید که برای تابع تبدیل مرتبه اول $\frac{1}{s+1}$ یک تحقق با یک متغیر حالت x_1 و یک تحقق با دو متغیر حالت x_1, x_2 تعیین‌شده است. به تحققی کاهش ناپذیر یا مینیمال می‌گوییم که با حداقل متغیرهای حالت انجام پذیرد.

۷ تعریف: تحقق کاهش ناپذیر

تحقق یک تابع تبدیل $H(s)$ کاهش ناپذیر یا مینیمال است اگر هیچ تحقق با تعداد متغیر حالت کمتر از آن نتوان یافت.

برای بررسی خواص تحقق‌های کاهش ناپذیر لازم است پارامترهای مارکوف و ماتریس هنکل را معرفی نمائیم.

کمیتهای $\{CA^{i-1}b, i=1,2,....\}$ را پارامترهای مارکوف می‌نامند. ویژگی خاص پارامترهای مارکوف این است که در تحقق‌های مختلف از یک تابع تبدیل این پارامترها تغییرناپذیر باقی می مانند. بدین ترتیب پارامترهای مارکوف به صورت منحصر بفرد از تابع تبدیل قابل استخراج می‌باشند. برای تعیین این پارامترها از روی تابع تبدیل می‌توان بسط تابع تبدیل را بر حسب توان‌های منفی s بنویسیم.

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \sum_{i=0}^{\infty} h_i s^{-i} \qquad (8\text{-}6)$$

که در آن

$$(sI-A)^{-1} = s^{-1}I + s^{-2}A + s^{-3}A^2 + ... \qquad (9\text{-}6)$$

با مقایسه دو معادله فوق مشخص می‌شود که پارامترهای مارکوف همان ضرایب بسط چندجمله‌ای فوق h_i می‌باشند.

$$(i=1,2,....) \;\; \rightarrow h_i = CA^{i-1}b \qquad (10\text{-}6)$$ فشارسنج هوا مارکوف

حال اگر تحقق‌های مختلفی را از یک تابع تبدیل $H(s)$ داشته باشیم مسلماً ضرایب بسط توانی فوق برای کلیه تحققها بایستی یکسان باشند. لذا

$$C_1 A_1^{i-1} B_1 = C_2 A_2^{i-1} B_2 \qquad (11\text{-}6)$$

یعنی پارامترهای مارکوف تغییرناپذیر بوده و به شکل تحقق مربوط نخواهند شد. ماتریس هنکل نیز با استفاده از پارامترهای مارکوف به ترتیب زیر تشکیل می‌شود.

$$M(i,j)=\begin{pmatrix} h_i & h_{i+1} & \cdots & h_{i+j} \\ h_{i+1} & h_{i+2} & \cdots & h_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{i+j} & h_{i+j+1} & \cdots & h_{i+2j} \end{pmatrix} \qquad (12\text{-}6)$$

مسلماً ماتریس هنکل نیز که از پارامترهای تغییرناپذیر مارکوف تشکیل می‌شود خود تغییرناپذیر است و با نوع تحقق تغییر نمی‌کند.

۷ قضیه:

تحققی کاهش ناپذیر است اگر و تنها اگر کنترل‌پذیر و رؤیت پذیر باشد.

6-3- تحقق سیستمهای SISO:

در این بخش روش‌های مختلف تحقق سیستمهای تک ورودی-تک خروجی بررسی می‌گردند. اساساً علت نام‌گذاری تفسیر تابع تبدیل به نمایش فضای حالت با عنوان تحقق مربوط به زمانی است که پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌ها یا فیلتر ها به صورت الکترونیکی و توسط Op-Amp صورت می‌پذیرفت. از Op-Amp هم به عنوان تقویت‌کننده، هم به عنوان انتگرال گیر (با اضافه کردن یک خازن) و هم به عنوان جمع کننده و مقایسه کننده می‌توان استفاده کرد.

لذا تحقق سیستمها توسط این المان‌ها به صورت بلوک دیاگرام ارائه خواهد شد؛ اما نه تنها به علت پیاده‌سازی بلکه بخاطر استفاده از تئوری کنترل مدرن برای طراحی و تنظیم کنترل‌کننده‌ها لازم است سیستمها را در فرم فضای حالت بررسی کنیم.

انواع مختلف روش‌های تحقق بسیار متنوع می‌باشند که در بخش‌های بعدی به برخی از آن‌ها می‌پردازیم. بسته به نوع تحقق خواص مشخصی را از آن‌ها می‌توان انتظار داشت که بهترین خصوصیت در تحقق کاهش ناپذیر بودن آن است. در اینجا فرض کنید یک تابع تبدیل اکیداً سره با مشخصات زیر را بخواهیم به فرم ماتریسی (A,B,C,B) محقق نمائیم.

$$H(s)=\frac{b_{n-1}s^{n+1}+b_{n-2}s^{n-2}+....+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+....+a_0} \qquad (13\text{-}6)$$

لذا در حالت کلی ممکن است قطب و صفر مشترکی در این تابع تبدیل موجود باشد که به صورت مود پنهان در چندجمله‌ای‌های فوق قابل‌مشاهده مستقیم نباشد. در صورتی که بخواهیم تحقق، کاهش ناپذیر باشد لازمست ابتدا مودهای پنهان را پیداکرده و حذف نمائیم و سپس عملیات تحقق را صورت دهیم.

6-3-1- تحقق کانونیکال کنترل‌کننده:

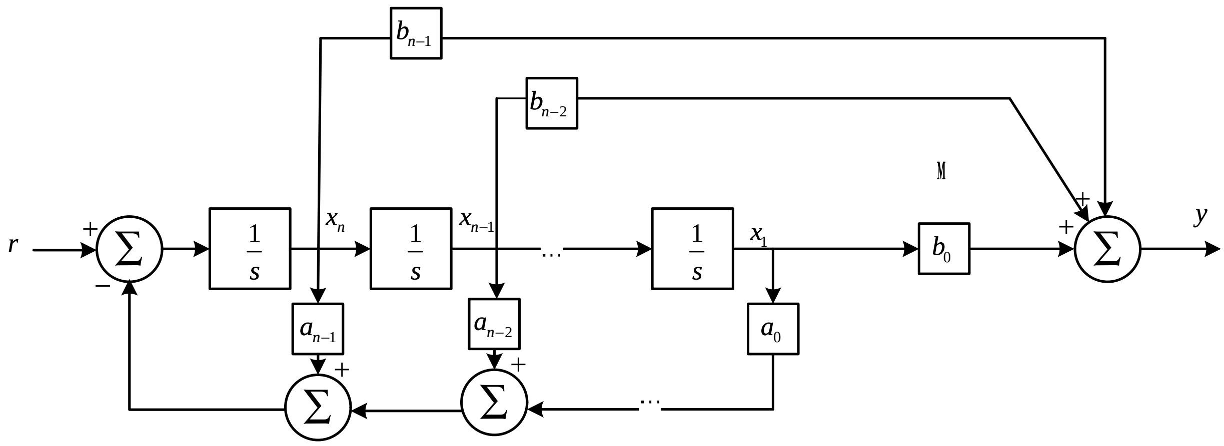
سیستم 6-13 را در نظر بگیرید، در تحقق کانونیکال کنترل‌کننده از متغیرهای حالت به فرم زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - ...a_0 x_1 + r(t) \\ y = b_{n-1}x_n + b_{n-2}x_{n-1} + ... + b_1 x_2 + b_0 x_1 \end{cases} \qquad (14\text{-}6)$$

لذا در حالت ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ \vec{y} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \vec{x} \end{cases} \qquad (15\text{-}6)$$

فرم بلوک دیاگرام آن به ترتیب زیر است:



شکل 6-1: بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال کنترل‌کننده

همانگونه که از نام تحقق پیداست این تحقق کنترل‌پذیر است. برای بررسی این مدعا، ماتریس کنترل‌پذیری را تشکیل می‌دهیم.

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & * \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \qquad (16\text{-}6)$$

که در آن * عنصر غیر صفر می‌باشد. همانگونه که مشخص است بر روی قطر فرعی این ماتریس تمامی عناصر یک می‌باشند. لذا رتبه ماتریس کنترل‌پذیری برابر n بوده و این سیستم کنترل‌پذیر می‌باشد؛ اما رؤیت پذیر بودن این تحقق وابسته به آن است که سیستم مودهای پنهان نداشته باشد.

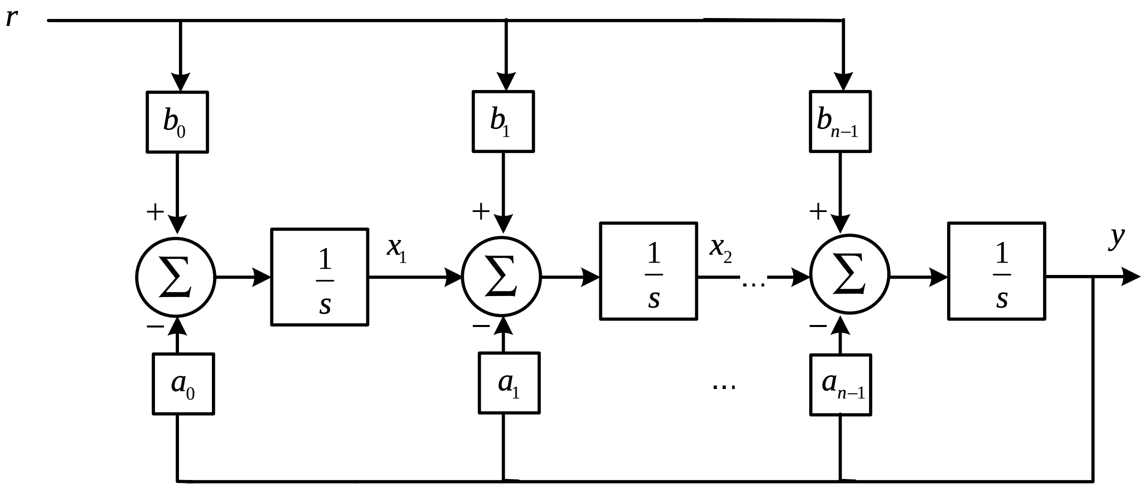
نکته: تحقق کانونیکال کنترل‌کننده همواره کنترل‌پذیر است و در صورتی که تابع تبدیل مورد تحقق قطب و صفر مشترکی نداشته باشد، رؤیت پذیر نیز خواهد بود.

6-3-2- تحقق کانونیکال رؤیت کننده:

این تحقق به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{n-1}\end{pmatrix} r\\ \vec{y} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)\,\vec{x}\end{cases} \qquad (17\text{-}6)$$

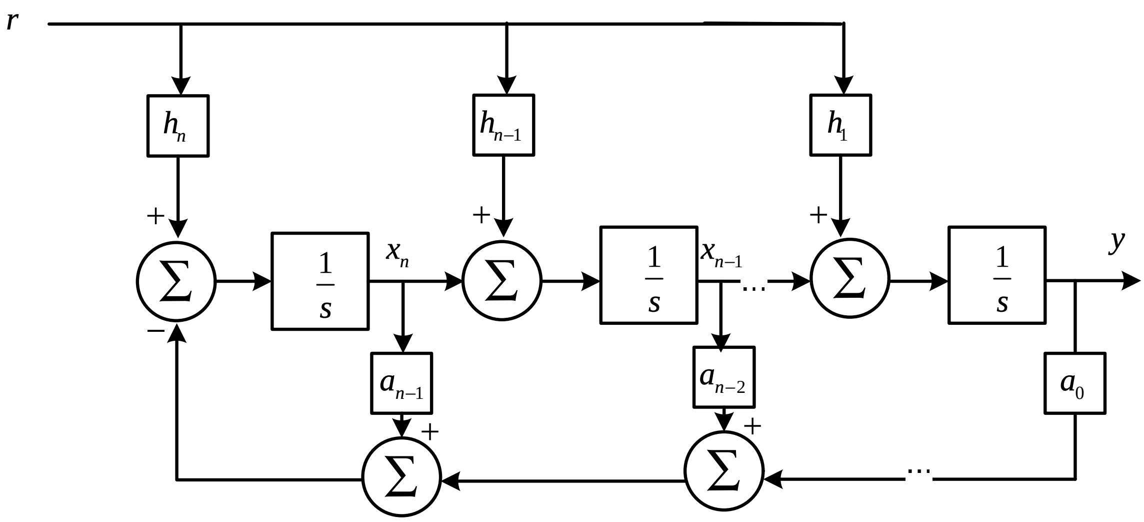
توجه کنید که این تحقق دوگان تحقق کانونیکال کنترل‌کننده است که در آن $A_0 = A_c^T, b_0 = C_c^T, C_0 = b_c^T$ لذا با توجه به خاصیت دوگانی سیستمهای خطی این تحقق به صورت ذاتی رؤیت پذیر می‌باشد و در صورتی که تابع تبدیل سیستم قطب و صفر مشترک نداشته باشد کنترل‌پذیر هم خواهد بود. (مینیمال می‌گردد). شکل زیر تحقق رؤیت کننده به صورت کانونیکال را نشان می‌دهد.



شکل 6-2: بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال رؤیت کننده

6-3-3- تحقق کانونیکال رؤیت پذیری:

بلوک دیاگرام این تحقق مطابق شکل زیر است:



شکل 6-3: بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

و یا به فرم ماتریسی زیر:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_n\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases} \tag{18-6}$$

که در آن h_i پارامترهای مارکوف در سیستم می‌باشند.

$$H(s)=\sum_{i=1}^{\infty}h_i s^{-i} \tag{19-6}$$

و از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشند.

$$\begin{pmatrix}h_1\\\vdots\\h_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a_{n-1}&1&&\vdots\\\vdots&&1&0\\a_1&a_2\cdots&a_{n-1}&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_{n-1}\\b_{n-2}\\\vdots\\b_0\end{pmatrix} \tag{20-6}$$

با محاسبه مستقیم ماتریس رؤیت پذیری می‌توان نشان داد برای این تحقق:

$$O=\begin{pmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}=I \tag{21-6}$$

لذا این تحقق همواره رؤیت پذیر می‌باشد. همگن بودن ماتریس رؤیت پذیری نه تنها رؤیت پذیری سیستم را نشان می‌دهد بلکه یکنواختی عددی در محاسبه متغیرهای حالت سیستم را از روی اطلاعات خروجی سیستم، مشخص می‌سازد. از طرف دیگر ماتریس کنترل‌پذیری این تحقق عبارت است از:

$$\begin{aligned}C&=\begin{pmatrix}B&AB&\cdots&A^{n-1}B\end{pmatrix}\\&=M(1,n-1)\end{aligned} \tag{22-6}$$

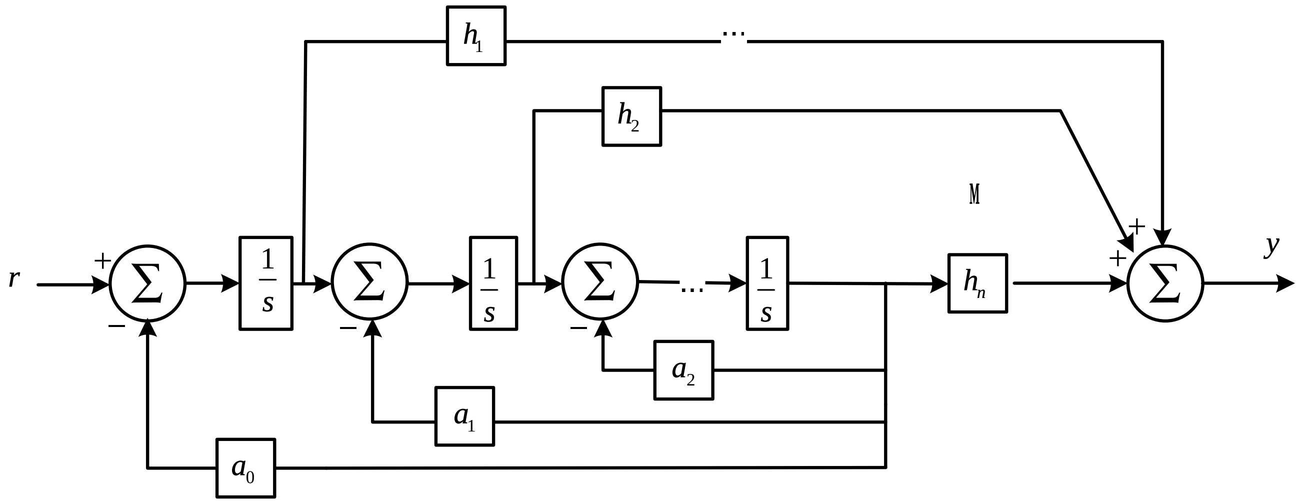
ماتریس هنکل با آرایه‌های 1و$n-1$ همانند قبل تنها زمانی سیستم کنترل‌پذیر خواهد بود که تابع تبدیل $H(s)$ دارای صفر و قطب مشترک نباشد.

6-3-4- تحقق کانونیکال کنترل‌پذیری:

این تحقق دوگان تحقق قبل می‌باشد لذا:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&0&0&-a_0\\1&0&0&-a_1\\0&1&\vdots&\vdots\\0&0&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}h_1&h_2&\cdots&h_n\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases} \tag{23-6}$$

که در آن h_i پارامترهای مارکوف می‌باشند. لذا ماتریس کنترل‌پذیری سیستم ماتریس واحد بوده و ماتریس رؤیت پذیری آن ماتریس هنکل می‌باشد. نماد بلوکی این تحقق به فرم زیر است:



شکل 6-4: بلوک دیاگرام تحقق کانونیکال کنترل‌پذیری

مثال 6-1

تحقق‌های مختلف توابع تبدیل زیر را به دست آورید.

$$1)\ H(s)=\frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}$$

نخست توجه کنید قطب و صفرهای سیستم متمایز بوده[1] و لذا تحقق‌های به دست آمده کلاً کاهش ناپذیر می‌باشند.

الف) تحقق کانونیکال کنترل‌کننده

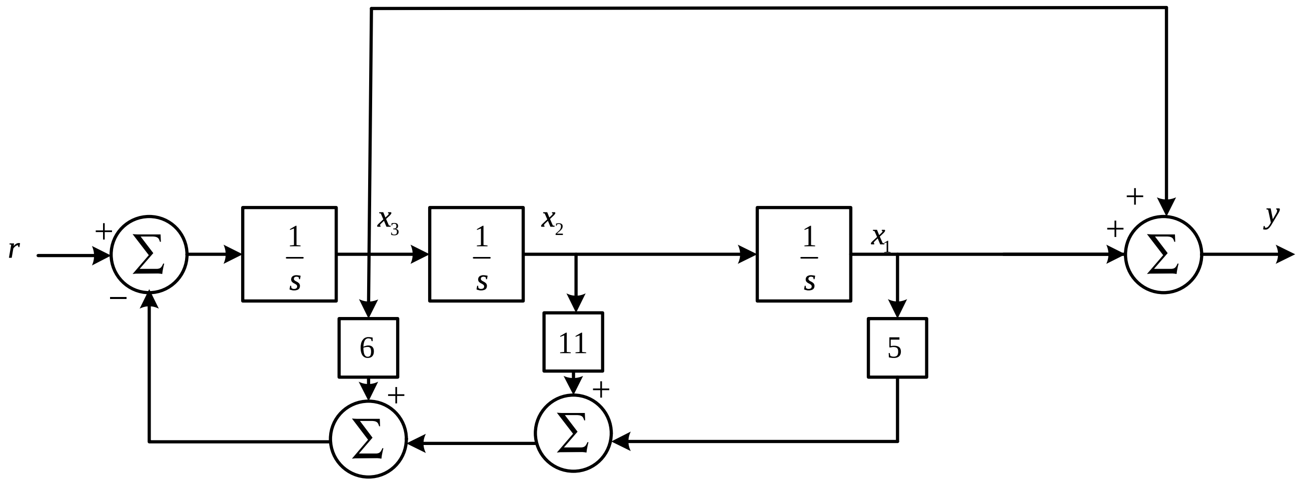
$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-6x_3-11x_2-5x_1+r(t)\\ y=x_1+x_3\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-11&-6\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases}$$

---

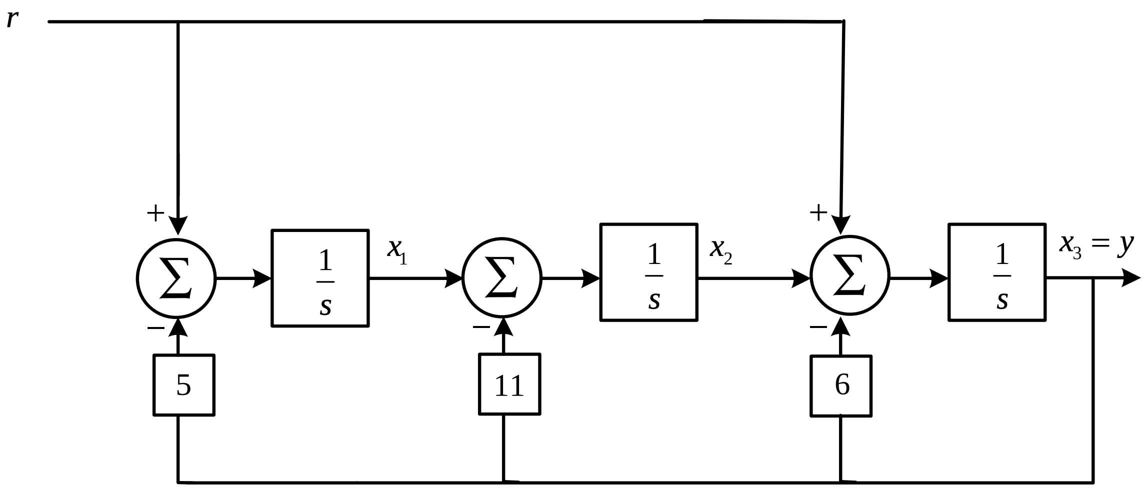
[1] به کد زیر توجه کنید:

```
>> [z,p]=tf2zp([1 0 1],[1 6 11 5])
z =
       0 + 1.0000i
       0 - 1.0000i
p =
  -2.6624 + 0.5623i
  -2.6624 - 0.5623i
  -0.6753
```



ب) تحقق کانونیکال رؤیت کننده

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}\rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&0&-5\\1&0&-11\\0&1&-6\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=-5x_3+r\\ \dot{x}_2=x_1-11x_3\\ \dot{x}_3=x_2-6x_3+r\\ y=x_3\end{cases}$$

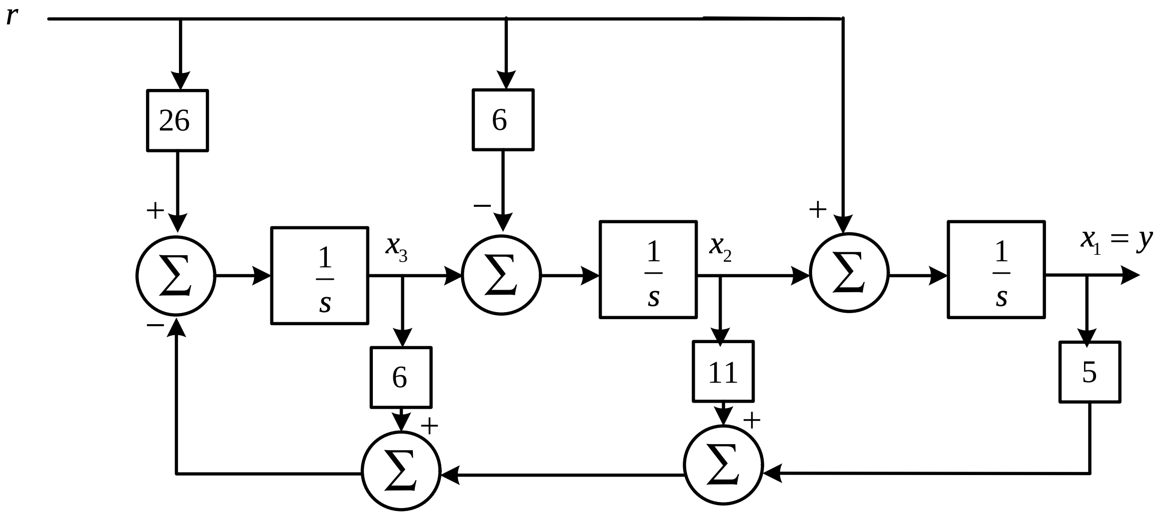


ج) تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-11&-6\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}1\\-6\\26\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+r\\ \dot{x}_2=x_3-6r\\ \dot{x}_3=-5x_1-11x_2-6x_3+26r\\ y=x_1\end{cases}$$

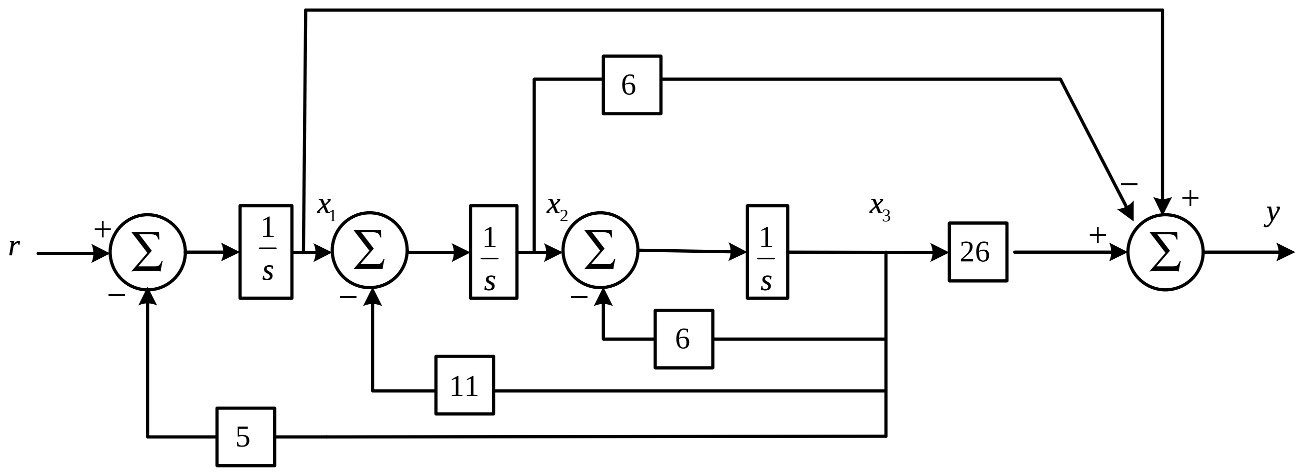
که در آن پارامترهای مارکوف از رابطه زیر تعیین‌شده‌اند:

$$\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&1&0\\11&6&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-6&1&0\\25&-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\26\end{pmatrix}$$



د) تحقق کانونیکال کنترل‌پذیری

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r \\ y = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 26 \end{pmatrix} \vec{x} \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_3 + r \\ \dot{x}_2 = x_1 - 11x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 - 6x_3 \\ y = x_1 - 6x_2 + 26x_3 \end{cases}$$



$$2)\ \ H(s) = \frac{s^2 + 2s - 1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

نخست توجه کنید قطب و صفرهای سیستم متمایز بوده[1] و لذا تحقق‌های به دست آمده کلاً کاهش ناپذیر می‌باشند.

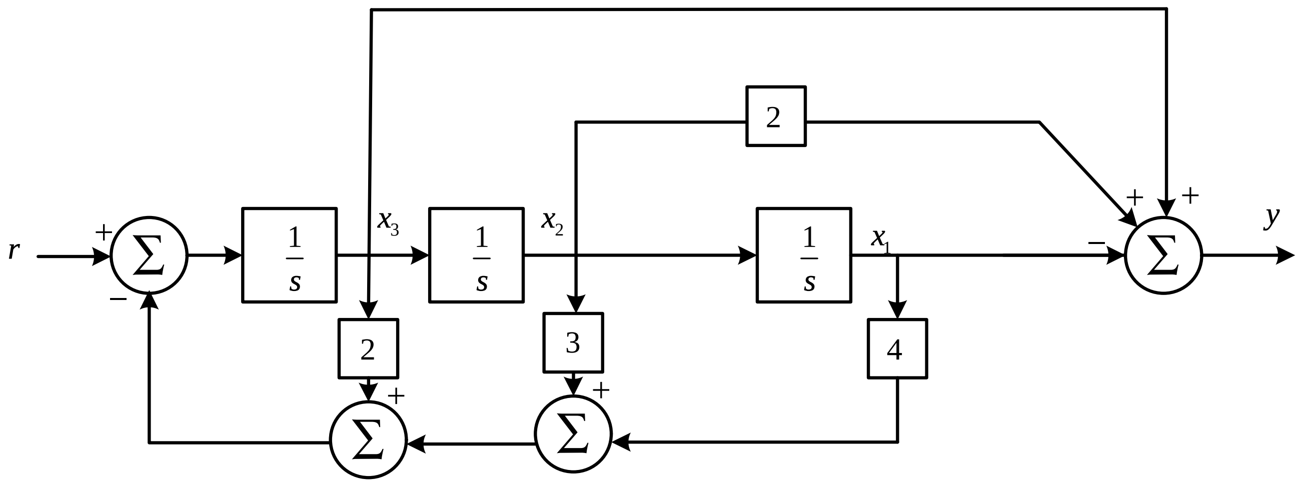
---

[1] به کد زیر توجه کنید:

```
>> [z,p]=tf2zp([1 2 -1],[1 2 3 4])
z =
   -2.4142
    0.4142
p =
  -1.6506
  -0.1747 + 1.5469i
  -0.1747 - 1.5469i
```

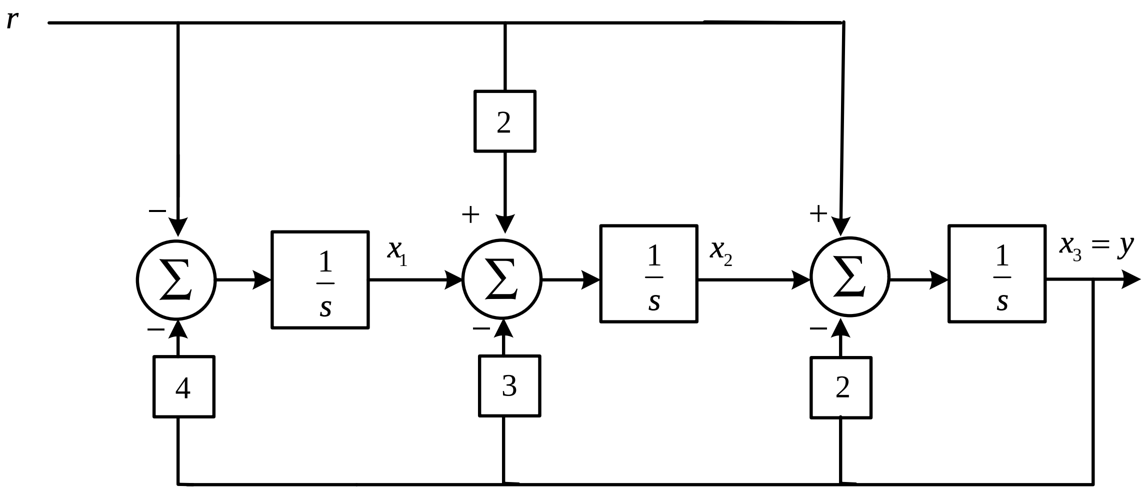
الف) تحقق کانونیکال کنترل‌کننده

$$H(s)=\frac{s^2+2s-1}{s^3+2s^2+3s+4}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-2x_3-3x_2-4x_1+r(t)\\ y=-x_1+2x_2+x_3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-3&-2\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}-1&2&1\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases}$$



ب) تحقق کانونیکال رؤیت کننده

$$H(s)=\frac{s^2+2s-1}{s^3+2s^2+3s+4}\rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&0&-4\\1&0&-3\\0&1&-2\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=-4x_3-r\\ \dot{x}_2=x_1-3x_3+2r\\ \dot{x}_3=x_2-2x_3+r\\ y=x_3\end{cases}$$

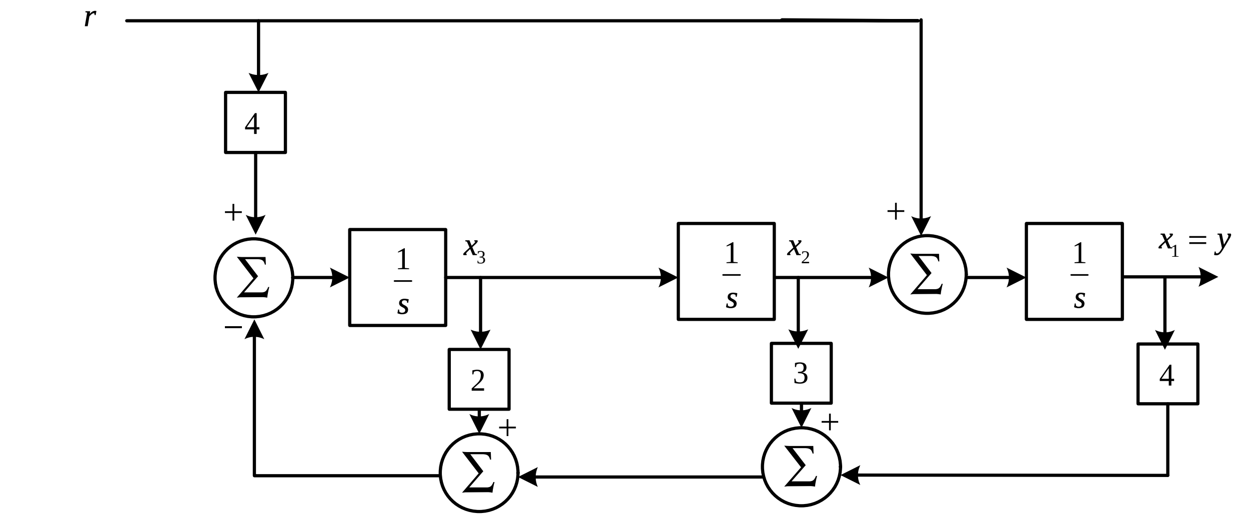


ج) تحقق کانونیکال رؤیت پذیری

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-3&-2\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}r\\ y=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\vec{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+r\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-4x_1-3x_2-2x_3+4r\\ y=x_1\end{cases}$$

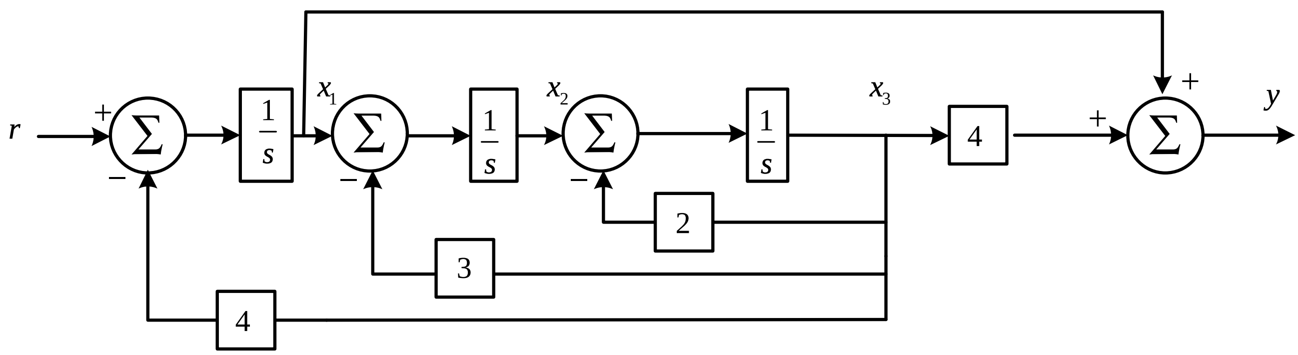
که در آن پارامترهای مارکوف از رابطه زیر تعیین‌شده‌اند:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



د) تحقق کانونیکال کنترل‌پذیری

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_3 + r \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 \\ y = x_1 + 4x_3 \end{cases}$$



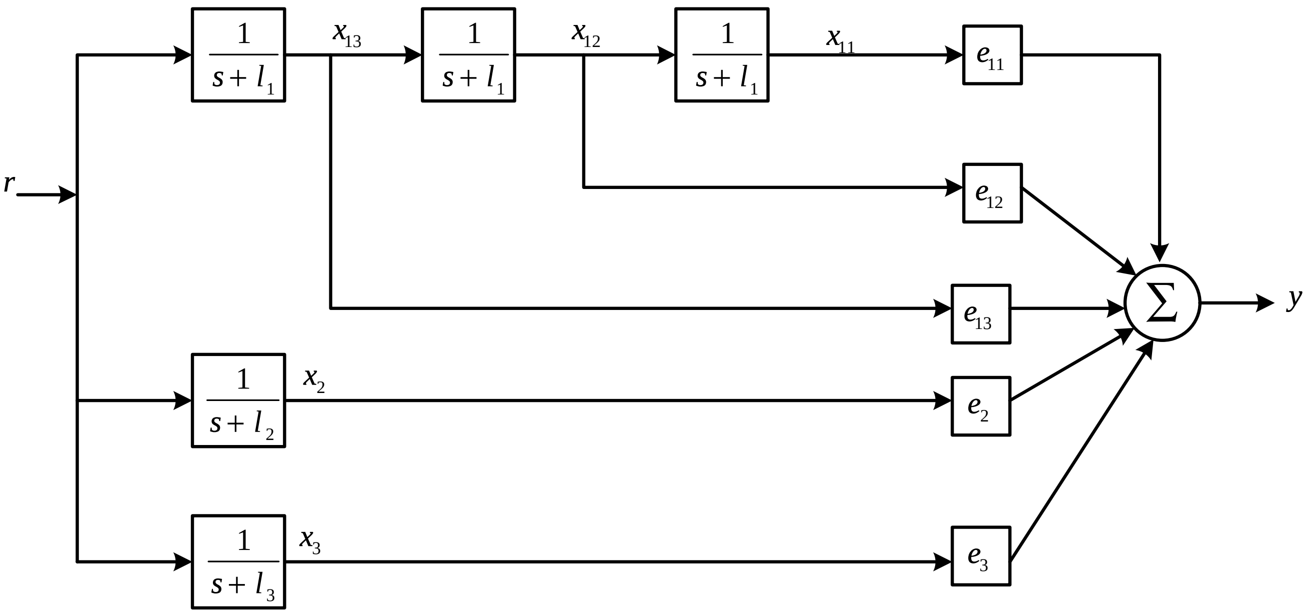
<

6-3-5- تحقق کانونیکال جردن

برای سادگی نمایش این روش اجازه دهید از یک مثال برای بیان این تحقق استفاده کنیم. ایده اصلی تحقق استفاده از فرم جردن می‌باشد؛ که ضمن سادگی مشخصات این سیستم را تعبیر می‌کند؛ اما فرم جردن در توابع تبدیل یعنی جداسازی قطب‌ها و این عمل توسط کسرهای جزئی انجام می‌شود. به عنوان مثال تابع تبدیل اکیداً سره درجه پنجمی را در نظر بگیرید که دارای ریشه تکراری با تکرر 3 می‌باشد. این تابع تبدیل را با استفاده از کسرهای جزئی به اجزای خود تقسیم می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{e_{11}}{(s-l_1)^3} + \frac{e_{12}}{(s-l_1)^2} + \frac{e_{13}}{(s-l_1)} + \frac{e_2}{s-l_2} + \frac{e_3}{s-l3} \qquad (24\text{-}6)$$

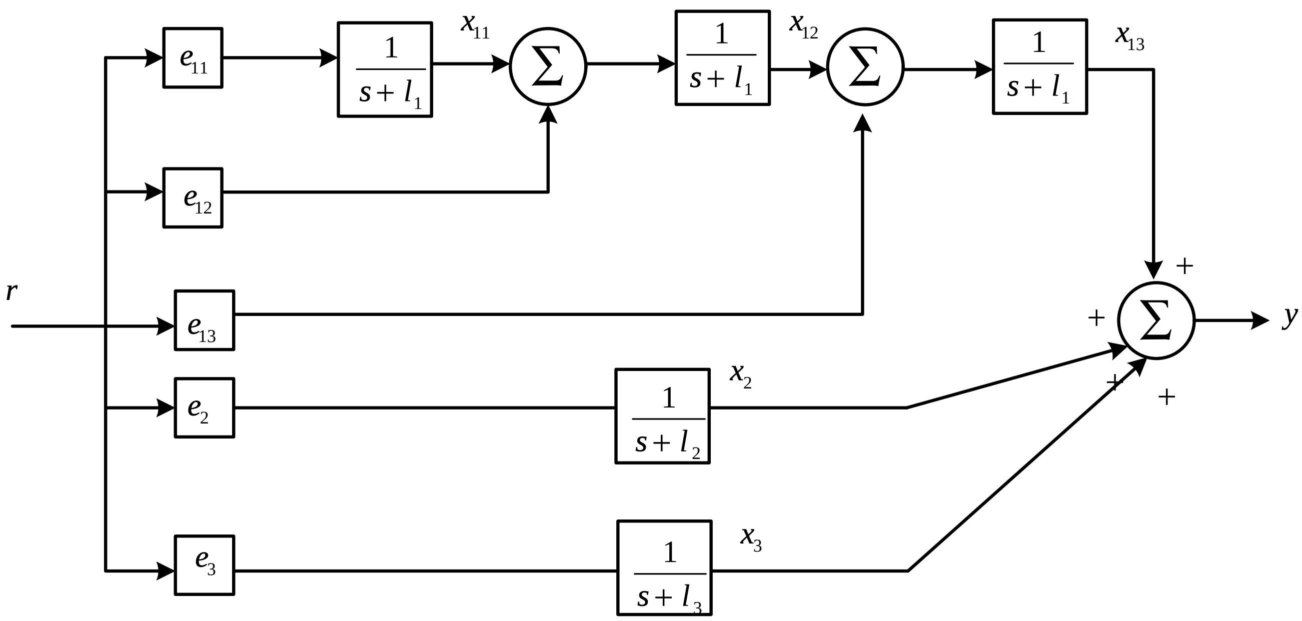
بدین ترتیب به دو صورت می‌توان این تابع تبدیل تجزیه‌شده را تحقق بخشید. شکل زیر نحوه تجزیه اول آن را نمایش می‌دهد.



لذا در این حالت:

$$\begin{cases}\dot{x} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} l_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & l_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & l_2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & l_3\end{array}\right)x + \left(\begin{array}{c}0\\0\\1\\ \hline 1\\ \hline 1\end{array}\right) r \\ y = (e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_2 \quad e_3)\, x\end{cases} \qquad (25\text{-}6)$$

همانگونه که در شکل ملاحظه می‌شود خروجی این تحقق از کلیه متغیرهای حالت تأثیر پذیرفته است و لذا این تحقق رؤیت پذیر است. حال اگر به صورت دیگر این تابع تبدیل تجزیه‌شده را تحقق بخشیم، می‌توان دید:



در این حالت ضرایب کسرهای جزیی در نزد ورودی باقی مانده و تحقق به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & l_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 \end{array}\right) x + \left(\begin{array}{c} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \end{array}\right) r \\ y = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) x \end{cases} \tag{26-6}$$

مثال 6-2

سیستم زیر را به فرم کانونیکال جردن محقق کنید.

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

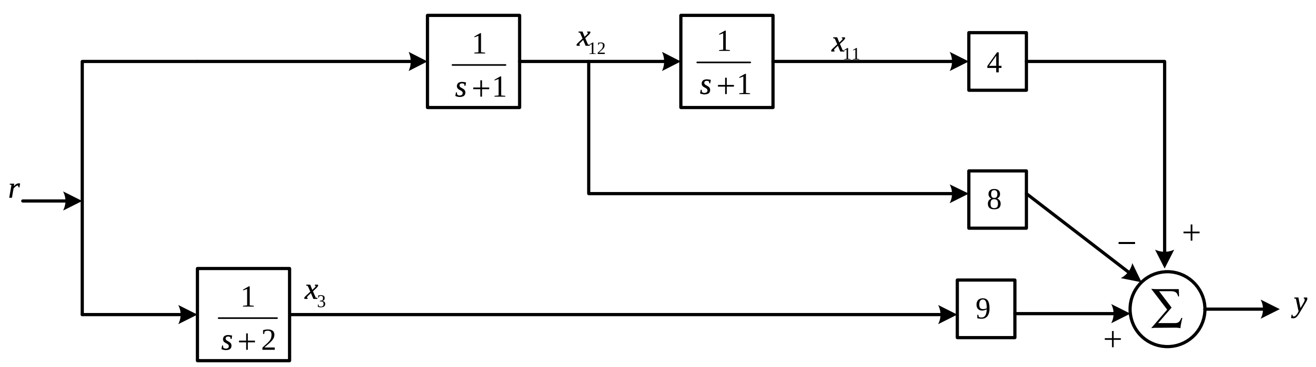
ابتدا تابع تبدیل را تجزیه می کنیم:

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2 (s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{s\to -1} (s+1)^2 H(s) = \lim\limits_{s\to -1} \dfrac{(s-1)^2}{(s+2)} = 4 \\ A = \lim\limits_{s\to -1} \dfrac{d}{ds}\left((s+1)^2 H(s)\right) = \lim\limits_{s\to -1} \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{(s-1)^2}{s+2}\right) = \lim\limits_{s\to -1} \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{2(s-1)(s+2) - (s-1)^2}{s+2}\right) = -8 \\ C = \lim\limits_{s\to -2} (s+1)^2 H(s) = \lim\limits_{s\to -2} \dfrac{(s-1)^2}{(s+1)^2} = 9 \end{cases}$$

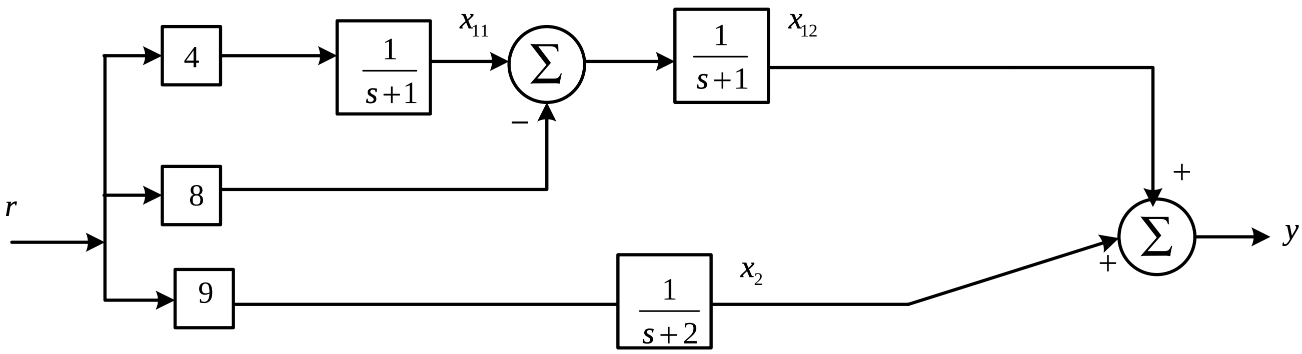
$$\to H(s) = \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{8}{(s+1)} + \frac{9}{(s+2)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ y = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 9 \end{pmatrix} x \end{cases}$$



یا

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 \end{array}\right) x + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} r \\ y = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 1 \end{array}\right) x \end{cases}$$



<

بخش هفتم:

فیدبک حالت

3 بخش هفتم: فیدبک حالت:

7-1- مقدمه:

طراحی کنترل‌کننده کلاسیک مبتنی بر فیدبک خروجی و ساختار معینی از کنترل‌کننده به عنوان مثال PID یا پیش فاز-پس فاز استوار است. این در حالی است که در دیدگاه مدرن اطلاعات ورودی-خروجی سیستم در متغیرهای حالت سیستم فشرده شده است. لذا ایده اصلی در طراحی کنترل‌کننده مدرن استفاده از فیدبک حالت می‌باشد.

7-2- خصوصیات فیدبک حالت

سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+B\vec{r}(t)\\ \vec{y}(t)=C\vec{x}(t)\end{cases} \tag{1-7}$$

که در آن $\vec{x}$ متغیر حالت nبعدی، $\vec{r}$ ورودی $\mathbf{1}$ بعدی و $\vec{y}$ خروجی m بعدی می‌باشد. هدف از طراحی کنترل‌کننده را می‌توان به صورت زیر بر شمرد.

- پایداری داخلی
- تنظیم یا ردیابی
- حذف اثر اغتشاش
- کاهش اثر نویز
- عدم حساسیت به مدل

می‌دانیم روش اصلی در ارضاء همزمان خصوصیت‌های فوق استفاده از حلقه فیدبک است؛ که در کنترل مدرن، فیدبک حالت پیشنهاد می‌گردد. با توجه به خواص متغیر حالت $\vec{x}$ که کلیه اطلاعات ورودی در زمان قبل را به اطلاعات خروجی‌های آینده مرتبط می‌سازد، اگر کنترل‌کننده $\vec{r}$ را تابعی از $\vec{x}$ در نظر بگیریم توانمندی لازم جهت پایدارسازی سیستم همزمان با تنظیم یا حذف اغتشاش را می‌توان به دست آورد. در سیستم‌های خطی این کنترل‌کننده را نیز تابعی خطی از $\vec{x}$ در نظر می‌گیریم.

$$\vec{r}=-k.\vec{x} \tag{2-7}$$

علامت منفی در اینجا تنها اشاره به مفهوم فیدبک منفی می‌باشد، ولی چون متغیر $\vec{x}$ یکتا نیست بسته به تحققهای مختلف از یک سیستم می‌تواند k مثبت یا منفی باشد و تنها به خاطر توجه به اهمیت فیدبک منفی در پایدارسازی سیستم ها از علامت منفی استفاده شده است. در این نمایش k یک ماتریس $[k]_{1\times n}$ می‌باشد و کنترل‌کننده از ترکیب خطی متغیرهای حالت سیستم تشکیل شده است. به منظور مقایسه این کنترل‌کننده با کنترل‌کننده‌های کلاسیک با توجه به این نکته که متغیرهای حالت سیستم معمولاً هم موقعیت $\vec{x}$ و هم سرعت $\dot{\vec{x}}$ را در بر می‌گیرند، ترکیب خطی آن‌ها فرم تعمیم‌یافته‌ای از کنترل‌کننده PD را تشکیل می‌دهد که بر روی کلیه متغیرهای حالت ترکیب شده است. در اینجا ماتریس k را ماتریس بهره حالت می‌نامیم. برای بررسی خواص این کنترل‌کننده، ابتدا سیستم حلقه بسته را در فضای حالت تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=(A-Bk)\vec{x}(t)\\ \vec{y}(t)=C\vec{x}(t)\end{cases} \tag{3-7}$$

که در آن $A_{cl}=A-Bk$، نیز یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان را نشان می‌دهد. اگر خاصیت پایداری داخلی سیستم مدنظر باشد، کافی است k را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مقادیر ویژه $A_{cl}=A-Bk$ همگی در نیم‌صفحه باز سمت چپ قرار گیرند $(\mathrm{Re}(l_i)<0)$. این انتخاب علاوه بر ایجاد پایداری داخلی نشان می‌دهد که $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ یعنی کلیه متغیرهای حالت در حالت ماندگار به سمت صفر میل می‌کنند. لذا خروجی که ترکیب خطی از ورودی می‌باشد نیز به سمت صفر میل خواهد نمود.

$$\vec{y}(t)=C\vec{x}(t)\rightarrow \lim_{t\to\infty}\vec{y}(t)=0 \qquad (4\text{-}7)$$

این بدان معنی است که تنظیم نیز توسط این کنترل‌کننده به صورت خودکار انجام می‌پذیرد؛ اما کلیه متغیرهای حالت و خروجی‌های سیستم به سمت مبدا یا حالت صفر تنظیم می‌شوند. این در حالی است که در اغلب مسائل کاربردی سیستمهای کنترل، تنظیم خروجی‌های سیستم به سمت متغیرهای غیر صفر مد نظر می‌باشد. این مهم نیز با تغییر کوچکی در پیاده‌سازی کنترل‌کننده حالت به صورت زیر محقق می‌شود.

فرض کنید ورودی مرجع را با y_d نمایش دهیم که در آن:

$$y_d\neq 0 \qquad (5\text{-}7)$$

ابتدا مقدار ماندگار متغیرهای حالت و ورودی‌های لازم برای رسیدن به y_d را محاسبه می‌کنیم.

در حالت ماندگار

$$\dot{\vec{x}}=0\rightarrow\begin{cases}0=A\vec{x}^*+B\vec{r}^*\\ \vec{y}_d=C\vec{x}^*\end{cases} \qquad (6\text{-}7)$$

این دستگاه معادلات $n+m$ معادله و $n+l$ مجهول دارد و در حالتی جواب وجود خواهد داشت که ماتریس

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}7)$$

تکین نباشد (یا رتبه این ماتریس حداقل برابر $n+l$ باشد) اما با توجه به تعریف صفر انتقال این بدان معناست که سیستم نبایستی در مبدا $s=0$، صفر انتقال داشته باشد.

دقت کنید که با تعبیر فیزیکی، اگر تعداد متغیرهای کنترل r مساوی یا بیشتر از تعداد متغیرهایی که بایستی کنترل شوند یعنی خروجی‌ها y باشند $(l\geq m)$، این ماتریس نا ویژه بوده که از لحاظ فیزیکی مطابق انتظار است. چرا که سیستم دارای تعداد محرکهای مساوی با خروجی بوده و حداقل برای کنترل هر خروجی یک متغیر مستقل ورودی وجود دارد. در حالتیکه $l=m$ باشد یک پاسخ یکتا در معادله فوق صدق خواهد نمود و در حالتیکه $l>m$ باشد بی‌نهایت پاسخ برای این معادله وجود خواهد داشت؛ اما اگر $l<m$ باشد یعنی تعداد ورودی‌ها کمتر از تعداد خروجی‌ها شود، در حالت کلی پاسخ وجود نخواهد داشت. این حالت در عمل به ندرت اتفاق می‌افتد که برای حل آن بایستی تعداد عملگرهای سیستم اضافه شود.

مثال 7-1

سیستم ناپایدار زیر را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن فیدبک حالت $\vec{r}=-k.\vec{x}=-(k_1x_1+k_2x_2)$، قطب‌های سیستم حلقه بسته را تعیین نمایید.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$A_{cl} = A - Bk = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 1+k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A_{cl}) = \det \begin{pmatrix} s-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & s+k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$s^2 + (k_2 - k_1)s + k_1 = 0$$

$$s_1, s_2 = \frac{k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 - 4k_1}}{2}$$ قطبهای سیستم حلقه بسته

محل قطب‌ها کاملاً به مقادیر k_1, k_2 مربوط بوده و در صورتی که $k_1 - k_2 < 0$ یا $k_1 < k_2$ باشد قطب‌های سیستم حلقه بسته پایدار خواهد ماند. همانگونه که مشاهده گردید قطب‌های سیستم توسط کنترل فیدبک حالت کاملاً قابل تنظیم می‌باشند.

<

7-3-طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت: جایابی قطب

با توجه به مثال 7-1 برای یک سیستم رسته دو مشاهده گردید که با انتخاب مناسب ضرایب ماتریس بهره k_1, k_2، می‌توان قطب‌های حلقه بسته را به هر نقطه‌ای از فضای S انتقال داد. این توانایی به علت استقلال خطی k_1, k_2 در تنظیم محل قطب‌های سیستم حلقه بسته می‌باشد که در حالت عمومی نیز برای سیستم‌های کنترل‌پذیر برقرار است. از طرف دیگر مشاهده شد که مسئله ردیابی و تنظیم سیستم به ورودی مرجع $y_d(t)$ قابل تبدیل به مسئله تنظیم حول صفر به علاوه یک حلقه پیش خور می‌گردد که پایداری و سرعت پاسخ بستگی مستقیم به محل قطب‌های سیستم حلقه بسته در صفحه S دارد. اگر کلیه قطب‌های سیستم حلقه بسته در نیم‌صفحه سمت چپ واقع شوند، سیستم پایداری داخلی خود را حفظ نموده و نوع قطب (درجه یک یا دو) شکل پاسخ سیستم حلقه بسته را مشخص می‌کند (غیر نوسانی یا نوسانی). از طرف دیگر محل قرارگیری قطب‌ها نسبت به محور موهومی سرعت پاسخ را تعیین می‌نمایند. بدین ترتیب جایابی قطب در عین سادگی یک روش مناسب برای طراحی کنترل‌کننده سیستم است که توسط آن می‌توان کلیه خواص مورد انتظار از حلقه فیدبک حالت را به دست آورد.

- **لم** (*):

فرض کنید (A,b) یک سیستم SISO کنترل‌پذیر و مرتبه n باشد. تبدیل همانندی نا ویژه‌ای با ابعاد $T_{n\times n}$ وجود دارد که توسط آن سیستم به فرم کانونیکال کنترل‌پذیری:

$$\left\{(A_c, b_c), A_c = T^{-1}AT, b_c = T^{-1}b\right\}$$

قابل نمایش خواهد بود.

نکته: دقت کنید در اینجا یک تحقق عمومی را می‌توان به یک تحقق کانونیکال کنترل‌پذیر تبدیل نمود.

- **قضیه جایابی قطب SISO**:

اگر یک سیستم مرتبه n کنترل‌پذیر داده‌شده باشد (A,b) و یک چندجمله‌ای $p(s)$ درجه n (که محل قطب‌های حلقه بسته را مشخص می‌کند) نیز داده‌شده باشد، ماتریس بهره k^T به صورت یکتا وجود دارد که معادله مشخصه ماتریس $(A - bk^T)$

همان $p(s)$ گردد. اهمیت قضیه در یکتایی پاسخ می‌باشد؛ یعنی به ازای یک ورودی در سیستم SISO به صورت یکتا می‌توان، ماتریس بهره k^T را به دست آورد که جایابی قطب را به صورت دلخواه انجام دهد.

اثبات: با استفاده از لم $(*)$سیستم را به فرم کانونیکال کنترل‌پذیری می‌نویسیم:

$$A_c=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, b_c=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حال k_c^T را یک بردار سطری با بعد n و ضرایب k_{ci} در نظر بگیرید در این حالت:

$$A_c=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0-k_{c1} & -a_1-k_{c2} & & \cdots & -a_{n-1}-k_{cn} \end{pmatrix}$$

چون ماتریس به فرم کانونیکال می‌باشد معادله مشخصه آن به صورت زیر است:

$$p_c(s)=s^n+(a_{n-1}+k_{cn})s^{n-1}+\ldots+(a_1+k_{c2})s+(a_0+k_{c1}) \tag{8-7}$$

با برابر قراردادن $p_d(s)=p_c(s)$ می‌توان ضرایب k_i را بر حسب a_i و ضرایب معادله مشخصه دلخواه $p_d(s)$ تعیین نمود.

حال با استفاده از تبدیل همانندی لم $(*)$به مختصات اول بر می‌گردیم:

$$\begin{aligned} &\forall T_{n\times n}\rightarrow A=TA_cT^{-1}, b=Tb_c \\ &\rightarrow T(A_c-b_ck_c^T)T^{-1}=A-bk^T \end{aligned} \tag{9-7}$$

$$k^T=k_c^TT^{-1} \tag{10-7}$$

دو معادله مشخصه $A_c-b_ck_c^T$ و $A-bk^T$ یکی می‌باشند. چرا که تبدیل‌های استفاده شده همانندی می‌باشند. به علت اینکه تنها یک k_c^T وجود دارد که هم ارزی معادله مشخص $p_d(s)=p_c(s)$ را برقرار سازد. بهره حلقه k^T نیز یکتا می‌باشد.

7-3-1- روش مستقیم برای تعیین ماتریس بهره فیدبک حالت

اولین روش به صورت مستقیم از قضایا استفاده شده است. مشخص شده است که $k_T^T=k_c^T$، اگر هر دو طرف این معادله را در عناصر چندجمله‌ای ضرب کنیم داریم:

$$k_T^T\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix}=k_c^T\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix} \tag{11-7}$$

سمت راست معادله از طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$k_{c1}+k_{c2}s+k_{c3}s^2+....+k_{cn}s^{n-1}=p_{cl}(s)-p_o(s) \qquad (12\text{-}7)$$

که در آن $p_o(s)$ معادله مشخصه سیستم مدار باز و $p_{cl}(s)$ معادله مشخصه سیستم مدار بسته است.

$$p_o(s)=\det(sI-A_c)=\det(sI-A) \qquad (13\text{-}7)$$

که در آن A_c نمایش سیستم در فرم کانونیکال می‌باشد. برای محاسبه سمت چپ معادله، لم $(*)$را در نظر آورید. T را می‌توان از رابطه $T=CC_c^{-1}$ محاسبه نمود اما این عملیات بسیار مفصل و زمان‌گیر است. اجازه دهید از روشی که T را محقق نموده‌ایم برای محاسبه آن استفاده کنیم. در واقع سطرهای T با استفاده از تحقق سطرهای ماتریس تبدیل $h(s)$ به دست می‌آید که در آن خروجی‌ها را $\check{y}=I.\check{x}$ یا به فرم تبدیل یافته $\check{y}=T.\check{z}$ می‌باشد. به عنوان مثال اگر یکی از سطرهای سیستم رسته 4 به صورت $2s^3+3s^2+s+1$ باشد، با استفاده از تحقق کانونیکال کنترل‌پذیری سطر C مربوط به شکل $(2 \quad 3 \quad 1 \quad 1)$ تحقق می‌یابد. لذا حاصل‌ضرب $T\begin{pmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{pmatrix}$ در سمت چپ از تحقق سطرهای صورت ماتریس تبدیل $h(s)$ به دست می‌آید. یا به تعبیر دقیق ریاضی:

$$C.T\begin{pmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{pmatrix}=I.T\begin{pmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{pmatrix}=\det(sI-A)h(s)=Adj(sI-A)b \qquad (14\text{-}7)$$

لذا بدون حل CC_c^{-1} می‌توان معادلات مشخصه را هم ارز قرارداد.

$$p_{cl}(s)=\det(sI-A)+k^T Adj(sI-A)b \qquad (15\text{-}7)$$

یا

$$p_{cl}(s)=p_o(s)+k^T Adj(sI-A)b \qquad (16\text{-}7)$$

پیوست

پیوست:

3 یادآوری ماتریس‌ها:

1- **ماتریس**: هر آرایه مستطیلی به شکل

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

را که متشکل از m سطر و n ستون می‌باشد را ماتریس گوییم. هر یک از آرایه‌های ماتریس به صورت a_{ij} که در آن $i=1,2,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,n$ می‌باشد، نمایش داده می‌شود.

2- **بردار**: ماتریسی که تعداد سطر یا تعداد ستون آن یک باشد یعنی

$$\vec{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}=\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

را بردار گویند. بردار $\vec{B}$ را بردار ستونی و بردار $\vec{C}$ را بردار سطری نامند.

هر ماتریس با m سطر و n ستون را می‌توان به زیر بردارهای سطری یا ستونی تقسیم نمود:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} (a_{11} & \ldots & a_{1n}) \\ (a_{21} & \ldots & a_{2n}) \\ & \vdots & \\ (a_{m1} & \ldots & a_{mn}) \end{pmatrix}$$

3- **بعد ماتریس**: یک ماتریس با m سطر و n ستون را ماتریسی با ابعاد $m\times n$ می‌نامند. بعد یک ماتریس را در گوشه سمت چپ آن نمایش می‌دهند:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

4- **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر نامند:

$$0_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

5- **ماتریس مربعی**: ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن برابر باشد را ماتریس مربعی نامند:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

6- **ماتریس قطری**: ماتریسی مربعی که تمام درایه‌های آن بجز قطر اصلی صفر باشد را ماتریس قطری نامند:

$$D_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

7- **ماتریس یکه**: ماتریس قطری که درایه‌های قطر اصلی آن یک باشد را ماتریس یکه نامند و با I_n نمایش می‌دهند:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

8- **ترانهاده یک ماتریس**: در ماتریس ترانهاده جای سطر و ستون ماتریس تغییر می‌کند. ماتریس ترانهاده را با A^T نمایش می‌دهند:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

9- **ماتریس مثلثی**: ماتریسی که بالا/پایین قطر اصلی آن کاملا صفر باشد را ماتریس مثلثی گویند:

ماتریس بالا مثلثی:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

ماتریس پایین مثلثی:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

3 1-3-2- اعمال ماتریسی:

1- **تساوی دو ماتریس**: دو ماتریس را در صورتی مساوی گویند که تک‌تک درایه‌های آن‌ها با یکدیگر برابر باشد:

$$A = B \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \rightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ \vdots \\ a_{mn} = b_{mn} \end{cases}$$

2- **ضرب یک اسکالر در ماتریس**:

$$k.A = k.\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} k.a_{11} & \cdots & k.a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k.a_{m1} & \cdots & k.a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \rightarrow \begin{cases} 1.A = A \\ 0.A = 0_{m\times n} \end{cases}$$

3- **جمع/تفریق دو ماتریس**: دو ماتریس را تنها در صورتی می‌توان جمع/تفریق نمود که ابعاد آن‌ها یکی باشد:

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}\pm\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

4- **ضرب دو ماتریس**: برای ضرب دو ماتریس ابتدا ماتریس اول را به صورت بردارهای سطری و ماتریس دوم را به صورت بردارهای ستونی جدا می‌کنیم، سپس داریم:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \vec{B}_1 & \vec{B}_2 & \cdots & \vec{B}_k \end{pmatrix}$$

$$C=A\times B=\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{B}_1 & \vec{B}_2 & \dots & \vec{B}_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{A}_1\times\vec{B}_1 & \vec{A}_1\times\vec{B}_2 & \cdots & \vec{A}_1\times\vec{B}_k \\ \vec{A}_2\times\vec{B}_1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vec{A}_m\times\vec{B}_1 & & & \vec{A}_m\times\vec{B}_k \end{pmatrix}$$

برای ضرب دو ماتریس حتماً باید تعداد ستون ماتریس اول با تعداد سطر ماتریس دوم یکی باشد:

$$C_{m\times k}=A_{m\times\boxed{n}}\times B_{\boxed{n}\times k}$$

3 اعمال ماتریس‌های مربعی:

1- **دترمینان**: برای یک ماتریس مربعی، دترمینان به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n} \end{pmatrix}_{n\times n}\rightarrow|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

که در آن M_{ij} کهاد ماتریس A خوانده می‌شود. کهاد M_{ij} دترمینان ماتریس است که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به دست می‌آید:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ddots & a_{ij} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow M_{ij}= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{حذف} & & \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cancel{\ddots} & \ddots & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\ddots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\ddots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \cancel{\ddots} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \end{array} \ \text{حذف}$$

- **خواص دترمینان:**

1) $|I_n|=1$

2) $|k.A|=k^n|A|$

3) $|AB|=|A||B|$

4) $|A^T|=|A|$

- **نکته:**

دترمینان ماتریس‌های 2×2 و 3×3 را می‌توان به روش‌های زیر نیز محاسبه نمود:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{ad-bc}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. = \left((a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) \right) - \left((a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{13}a_{22}a_{31}) \right)$$

2- **معکوس یک ماتریس:** معکوس یک ماتریس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

که در آن A^* ماتریس الحاقی خوانده می‌شود:

$$A^*=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}M_{11} & \cdots & (-1)^{1+n}M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}M_{n1} & \cdots & (-1)^{n+n}M_{nn} \end{pmatrix}^T$$

- **نکته:**

معکوس ماتریس 2×2 و را می‌توان به روش‌های زیر نیز محاسبه نمود:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3- **اثر یک ماتریس:** اثر یک ماتریس که با $tr(A)$ نمایش داده می‌شود مجموع عناصر روی قطر اصلی آن است:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3 **تعریف نرم**:

-1 **نرم یک بردار**: نرم یک بردار که به معنای طول آن تا مبدا می‌باشد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\rightarrow\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2}$$

-2 **نرم یک ماتریس**: نرم یک ماتریس به صورت زیر تعریف می‌گردد:

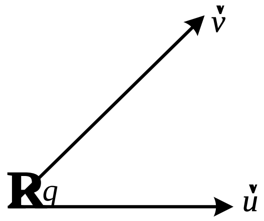
$$\|A\|=\max\frac{\|A\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|},\ \ \vec{v}\neq\vec{0}$$

3 **ضرب داخلی دو بردار**: ضرب داخلی دو بردار هم بعد، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=(u_1,u_2,\ldots,u_n)^T.(v_1,v_2,\ldots,v_n)=\sum_{i=1}^{n}u_i.v_i=u_1.v_1+u_2.v_2+\ldots+u_n.v_n$$

3 **زاویه بین دو بردار**: زاویه بین دو بردار، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\cos\theta=\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$



بنابراین اگر دو بردار بر یکدیگر عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها صفر خواهد بود:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta\rightarrow\theta=90^\circ\xrightarrow{\cos 90^\circ=0}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$$

3 **عملیات سطری مقدماتی**:

ماتریس A را هم ارز ماتریس B گوییم اگر B را بتوان با رشته‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی زیر به A تبدیل نمود:

-1 سطر i و j را باهم تعویض نماییم، یعنی: $R_i\leftrightarrow R_j$

-2 سطر i را در یک اسکالر $k\neq 0$ ضرب نماییم، یعنی: $R_i\rightarrow kR_i$

-3 سطر i را با $k\neq 0$ برابر سطر j ام جمع نماییم، یعنی: $R_i\rightarrow kR_j+R_i$

3 منابع:

1- دکتر حمیدرضا تقی راد، مقدمه ای بر کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، چاپ اول آبان 1389.
2- دکتر علی خاکی صدیق، اصول کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ دوم، پاییز 1382.
3- Chen, Chi-Tsong., Linear System Theory and Design, Oxford University Press, c1999.
3- جزوه درسی جبر خطی، سرکار خانم صدیق زاده دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی در سایت:
http://saba.kntu.ac.ir/eecd/sedghizadeh/linearalgebra/