محمد اعرابیان

کنترل مدرن

جلسه اول تا هشتم

مشاهده جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

نسخه ۱.۱ | تهیه شده در بهمن ماه ۱۴۰۰

ضرب داخلی دو بردار:

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \rightarrow$ عدد

ترکیب خطی بردارها:

مثال:

$$-5\begin{cases} 2c_1 - 3c_2 = 4 \\ 10c_1 - 15c_2 = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} -10c_1 + 15c_2 = -20 \\ 10c_1 - 15c_2 = 20 \end{array}$$

این دوتابع باهم مرتبط هستند و جواب نهایی صفر می شود یعنی وابسته به هم هستند. جواب بی نهایت می شود. وابسته ی هم هستند. درخطی بی نهایت جواب دارد.

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 \rightarrow \overbrace{(\underset{a_u}{1} - \underset{b_u}{4})}^{u} = c_1(\underset{a_1}{2},\underset{b_1}{10}) + c_2(\underset{a_2}{-3},\underset{b_2}{-15})$$

$$-5\begin{cases} 2c_1 - 3c_2 = 1 \\ 10c_1 - 15c_2 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} -10c_1 + 15c_2 = -5 \\ 10c_1 - 15c_2 = -4 \end{array}$$

هیچ حالت خاصی وجود ندارد که بتوان این معادله راحل کرد، بنابراین وابسته ای هم نیستند. چون جواب برحسب مجهول به دست نیامد و فقط عدد باقی ماند.

نکته: ضرب داخلی یک عدد می شود.

مفهوم اسپن:

اگر: $r = [r_1, r_2, r_3]$

$$[r_1, r_2, r_3] = [a + b\ , 2a + b + 2c\ \ , a + b - c]$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = r_1 \\ 2a + b + 2c = r_2 \\ a + b - c = r_3 \end{cases}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات زیر می باشد:

$$Ax = y\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & r_3 \\ (a+b) & (2a+b+2c) & (a+b-c) \end{array}$$

حال بایدبررسی کنیم که این دستگاه معادلات سازگار است یا ناسازگار یعنی حداقل یک جواب دارد یانه.

برای این منظور باید ماتریس A غیر منفرد باشد. یعنی $|A| \neq 0$ باشد.

از آن جایی که $|A| = 0$ می باشد. بنابراین برای هر بردار دلخواه $r = [r_1, r_2, r_3]$ می توان یک جواب پیدا کرد.

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]} \end{array} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

بردار اسپن

لذا بردار های $w = [0\ , 2\ , -1]$ و $v = [1\ , 1, 1]$ و $u = [1\ , 2\ , 1]$ فضای برداری R^3 را اسپم می کند.

ضرب داخلی: $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots$

درضرب داخلی جواب یک عدد (اسکالر) می شود.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \text{و} & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \vec{a}.\vec{b} = (1\times 2) + (3\times 4) + (5\times 6) = 2 + 12 + 30 = 44$$

ضرب خارجی: ص ۸۱ ضرب خارجی را با × نشان می دهیم.

ضرب خارجی درنتیجه یک بردار می شود. جواب بردار است.

$$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3) \qquad \vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} = (a_2b_3 - a_3b_2 , a_3b_1 - a_1b_3 , a_1b_2 - a_2b_1)$$

نکته: اگردوبرداربودمساحت رابیان می کند و اگر سه برداربود حجم را بیان می کند.

مفهوم اسپن:

$$u = [\overset{a_1}{1} , \overset{b_1}{2} , \overset{c_1}{-1}] , v = [\overset{a_2}{3} , \overset{b_2}{-1} , \overset{c_2}{1}] , w = [\overset{a_3}{-3} , \overset{b_3}{8} , \overset{c_3}{-5}]$$

$$au + bv + cw = a[\overset{a_1}{1} , \overset{b_1}{2} , \overset{c_1}{-1}] + b[\overset{a_2}{3} , \overset{b_2}{-1} , \overset{c_2}{1}] + c[\overset{a_3}{-3} , \overset{b_3}{8} , \overset{c_3}{-5}] = [a + 3b - 3c , 2a - b + 8c , -a + b - 5c]$$

u و v و w در a و b و c ضرب شده اند.

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات به صورت زیر می باشد:

$$Ax = y \rightarrow \begin{array}{r} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$u \quad v \quad w$$

$$A \quad x = y$$

$$|A| = 0$$

ازآن جایی که $|A| = 0$ می باشد، دستگاه معادلات مذکور ناسازگاربوده و هیچ جوابی ندارد.

لذا بردارهای $w = [-3\ ,8\ ,-5]$ و $v = [3\ ,-1\ ,1]$ و $u = [1\ ,2\ ,-1]$ را نمی توان به صورت یک ترکیب نوشت. پس این بردارهای فضای بردار R^3 را اسپن نمی کند.

استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها:

نکته: دترمینال اگر برابر صفر باشد وابسته نیستند. اگر نسبت به هم ضریب داشتند وابسته هستند.

بردار های $u_1, u_2, \dots, u_n$ را مستقل گویند.

اگر معادله ی به شکل زیر:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0$$

اگر $c_1, c_2, \dots, c_n$ اسکالرهای ثابتی هستند، فقط به ازای شرط زیربرقرار باشد.

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

درغیر این صورت بردار های $u_1, u_2, \dots, u_n$ را وابسته خطی گویند.

*صفحه ۲۰ فایل

مثال۶ : استدلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای زیررا بررسی کنید.

$$u_1 = [-2\ ,\ 1\ ]\ ,u_2 = [-1\ ,-3\ ]\ ,u_3 = [4\ ,-2\ ]$$

باتوجه به رابطه ی $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ داریم:

$$c_1[-2\,,\ 1\,] + c_2[-1\,,-3\,] + c_3[4\,,-2\,] = 0$$

$$[-2c_1 - c_2 + 4\,c_3\,,\ \ c_1 - 3c_2 - 2c_3] = [0\,,0\,]$$

$$\begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 + 4\,c_3 \\ c_1 - 3c_2 - 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 2c_3 \quad (c_3 \to t)$$

$$c_2 = 0 \begin{cases} c_1 = 2t \\ c_2 = 0 \\ c_3 = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_1 - 2c_3 = 0 \\ c_1 = 2c_3 \\ c_1 = 2t \end{matrix}$$

مثال:

$$u_1 = [1\,,-2\,,3\,,-4\,]\,, u_2 = [-1\,,3\,,4\,,2\,]\,, u_3 = [1\,,1\,,-2\,,-2\,]$$

یک ماتریس 4×3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Rank = 3$$

چون هیچ کدام از ستون هابا هم رابطه ندارند و وابسته نیستند یعنی u_1, u_2, u_3 مستقل خطی هستند.

$$c_1 = c_2 = c_3$$

جایگشت بردارها:R

اگربردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ یک جایگشت ازبردارهای استقلال خطی داشته باشند آن است که، بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقل خطی باشند ازطرفی فضای اسپن این دودسته بردارها نیزیکسان خواهد بود.

$$SP\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = SP\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

درانجام عمل جایگشت طول ، اندازه و تعداد بردارها تغییر نمی کند.

نکته: *Rank* را ستونی درنظرمی گیریم.

نکته: ازآن جایی که $|A| \neq 0$ است، بنابراین بردارهای $u_1, u_2\ u_3$ مستقل خطی می باشند.

مثال:

$$c_1[2\ ,1\ ,\ \ 1\ ]\ + c_2[3\ ,4\ ,1\ ] + \ c_3[5\ ,2\ ,5\ ] = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ماتریس}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2$$

دترمینال صفرنشد بنابراین بردارهای $v_1, v_2\ , v_3$ مستقل خطی می باشند.

تغییر پایه دریک فضای برداری:

فرض کنیدبردارهای $e_1, e_2, \dots, e_n$ و بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ دو دسته بردارهای پایه برای فضای برداری n بعدی مانند v می باشند دراین صورت یک بردار متعلق به این فضا مانند u را به دوصورت زیر می توان نمایش داد.

$$u = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots b_n\ e_n = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

که در آن $c_1, c_2, \dots, c_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ اسکالرهای متناسب با پایه های مربوطه می باشند. این اسکالرها را

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = i$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = j$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k$$

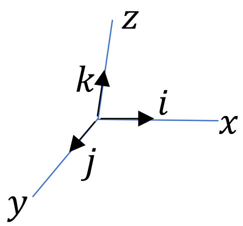
$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

مجموعه ی بردار های e_1, e_2, e_3 و $v_1, v_2\ , v_3$ درفضای R^3 تشکیل دو دسته ی پایدار می دهند.

$$E:\{e_1 = [1,0,0], e_1 = [0,1,0], e_1 = [0,0,1]\}$$

$$V:\{v_1 = [\overset{v_1}{1},\ \overset{v_2}{-1}\ ,\overset{v_3}{1}], e_1 = [\overset{v_1}{0}\ ,\overset{v_2}{1}\ ,\overset{v_3}{2}], e_1 = [\overset{v_1}{3}\ ,\overset{v_2}{0}\ ,\overset{v_3}{-1}]\}$$

ماتریس تبدیل متناظربرای متغیراز پایه ی $v_1, v_2\ , v_3$ به پایه ی e_1, e_2, e_3 را بیابید:



برای این منظور هریک از بردار های $v_1, v_2\ , v_3$ را به صورت یک ترکیب خطی از بردار های e_1, e_2, e_3 می نویسیم:

صفحه ی ۴۴ جواب ادامه

$$e_1 = [1\ ,0\ ,0] = \left(\frac{1}{10}\right) v_1 + \left(\frac{1}{10}\right) v_2 + \left(\frac{3}{10}\right) v_3$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow e_1 \\ \longrightarrow e_2 \\ \longrightarrow e_3 \end{matrix}$$

$$\hookrightarrow\ e_3 = [0\ ,0\ ,\overset{*}{1}] \ \rightarrow \overset{1}{K_{31}}V_1 + \overset{2}{K_{32}}V_2 + \overset{-1}{K_{33}}V_3$$

ضرایب k را حساب می کنیم به طوری که مجموع آن ها برابر $\overset{*}{1}$ شود.

$$\text{جواب} \rightarrow \frac{3}{10}(1) + \frac{3}{10}(2) + \left(\frac{-1}{10}\right)(-1) = 1$$

ضرایب v ها ←k

مفهوم فضای پوچ دریک ماتریس:

فضای پوچی یک نگاشت خطی مانند A مجموعه ای است شامل کلیه ی بردارهای $x_{n\times1}$ که رابطه $Ax =$ 0 را برآورده سازی را برآورده سازد فضای پوچی با نماد $N(A)$ نشان داده می شود.

$$N(A) = \{\forall x \epsilon V_1 \rightarrow Ax = 0\}$$

(به ازای x هایی که معادله ی A راصفر کند)

بعد فضای پوچی را پوچی آن ماتریس می نامند.

مقادیر ویژه، بردارویژه و معادله ی مشخصه:

مقادیرویژه که با لاندا (λ) نشان داده می شود، همان S یا قطب های سیستم است. که به ازای آن ها سیستم پایدار می شود.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را درنظربگیرید. دترمینال زیررا چند جمله ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند.

$$|\lambda I_n - A|$$

که یک چندجمله ای مرتبه n ازλ می باشد. معادله ی مشخصه بدین صورت تعریف می شود.

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \overbrace{\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\lambda I_n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ 2 & -1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینال}}$$

$$(-3+\lambda)(-1+\lambda) - (-8) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 11$$

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(11) = 16 - 44 = -28$$

$$\text{دلتا} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm j\sqrt{28}}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 + j5.2 \\ \lambda_2 = 2 - j5.2 \end{cases}$$

کهادیا مینور:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد ماتریس مربعی یا کوچکتری که ازحذف یک یاچند سطر و ستون به دست می‌آید را کهاد یا مینور می گویند.

اگرفقط سطر iم و ستون jم ازماتریس A حذف می شود به این کهاد، کهاد مرتبه اول می گویند.

نکته: ازکهاد برای محاسبه ی همسازه یا کفاکتور ($Cofactor$) استفاده می شود.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = M_{\underset{i \quad j}{11}} = -1 \times (-1)^{i+j} = -1$$

$$M_{12} = 3 \times (-1)^3 = -3$$

$$M_{21} = -1 \times (-1)^3 = 1$$

$$M_{21} = 5 \times (-1)^4 = 5$$

$$Co\ factorA = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = C^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس معکوس 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

حالت کلی

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

جواب مثال قبل:

$$M_{11}=-2\begin{vmatrix}0&1\\-3&-4\end{vmatrix}=-2\times 3=-6\ \rightarrow\ -6\times(-1)^2=-6$$

$$M_{12}=-2\begin{vmatrix}0&1\\0&-4\end{vmatrix}=0$$

$$M_{13}=0\ |0|=0$$

$$M_{32}=-3\begin{vmatrix}-2&0\\0&1\end{vmatrix}=6=6\times(-1)^5=-6$$

$$M_{31}=0\ \times\begin{vmatrix}-2&0\\0&1\end{vmatrix}=0$$

$$M_{33}=-4\begin{vmatrix}-2&-2\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{21}=0\ \times\begin{vmatrix}-2&0\\-2&-4\end{vmatrix}=0$$

$$M_{22}=0\times\begin{vmatrix}-2&0\\0&-4\end{vmatrix}=0$$

$$M_{23}=-2\begin{vmatrix}-2&-2\\0&-3\end{vmatrix}=6=6\times(-1)^5=-6$$

$$\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&-6\\0&-6&0\end{bmatrix}=Cofactor=C$$

$$C^T=\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&-6\\0&-6&0\end{bmatrix}$$

$$|A|=-2\begin{vmatrix}0&1\\-3&-4\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}0&1\\0&-4\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0&0\\0&-3\end{vmatrix}=-6$$

$$A^{-1}=\frac{C^T}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&-6\\0&-6&0\end{bmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&-6\\0&-6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

محاسبه ی ماتریس معکوس به روش کیلی همیلتون:

$$|\lambda I-A|=0$$

شروع به حل کردن A = $\lambda \rightarrow \lambda$ = با چندجمله ای

مثال: ماتریس معکوس زیررا به روش کیلی همیلتون به دست آورید:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\text{حل}\rightarrow \lambda\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\overset{\lambda I}{\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\overset{\lambda I-A}{\begin{bmatrix}\lambda & 3 & 0\\ -3 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}}$$

$\lambda I-A$

$$|\lambda I-A|=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}-(+3)\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}-3 & \lambda\\ 0 & 0\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^2+9\lambda+9=0$$

به جای $\lambda \leftarrow A$ می گذاریم:

$$\overset{A^{-1}}{(A^3+A^2+9A+9=0)}$$

$$A^2+A+9+9A^{-1}=0\ \rightarrow\ A^2+A+9=-9A^{-1}$$

چون 9 یک عدد خالی است دریک ماتریس همانی ضرب می شود.

$$A^{-1}=\frac{-1}{9}(A^2+A+9)\ \rightarrow$$ باز می کنیم

$$A^{-1}=\frac{-1}{9}\left[\begin{bmatrix}-9 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]=\frac{-1}{9}\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{-1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

رابطه ی بین تابع تبدیل و فضای حالت:

$$x = A\dot{x} + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$G(S) = \frac{\text{چندجمله ای}}{\text{چند جمله ای باید توان از بالایی بیشتر باشد}}$$

تقسیم بندی سیستم از نظر درجه نسبی:

درجه مخرج n و درجه صورت m:

۱- $n > m - 1 \leftarrow$ اکیدا سره

$$\lim_{S\to\infty} G(S) = 0$$

۲- $n = m \leftarrow$ سره

$$\lim_{S\to\infty} G(S) = \text{عدد ثابت}$$

۳- $n < m \leftarrow$ تابع ناسره

$$\lim_{S\to\infty} G(S) = \infty$$

$$\begin{cases} x = A\dot{x} + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{L} \qquad SX(S) + x(0) + Ax(S)$$

$$L \begin{cases} SX(S) + x(0) = AX(S) + Bu(S) = 0 \\ Y(S) = CX(S) + Du(S) \end{cases}$$

$$X(S) = (SI - A)^{-1}.Bu(S)$$

$$Y(S) = C[(SI - A)^{-1}B + D]u(S)$$

$$G(S) = \frac{Y(S)}{u(S)} = G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

$$Y(S) = C(SI - A)^{-1}Bu(S) + Du(S)$$

$$Y(S) = u(S)[C(SI - A)^{-1}B + D]$$

$$G(S) = \frac{Y(S)}{u(S)} = \frac{u(S)[C(SI - A)^{-1}B + D]}{u(S)}$$

$$G(S) = [C(SI - A)^{-1}B + D]$$

درتابع تبدیل ما پاسخ حالت صفر را داریم، ولی پاسخ ورودی صفر را نداریم. سپس درنتیجه به پاسخ کامل سیستم دست نخواهیم یافت. این یکی از نقص های نمایش تابع تبدیل است.

مثال: تابع تبدیل سیستم های زیررابدست آورید:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -5x_1 - x_2 + 2u \\ \dot{x_2} = 3x_1 - x_2 + 5u \end{cases}$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

$$x = A\dot{x} + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$C = [C_1, C_2] \qquad , D = [1]$$

تابع تبدیل اصلی $= \ G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$C = [1,2] \qquad , D = [0]$$

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+5 & 1 \\ -3 & S+1 \end{bmatrix}$$

CT

$$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} S+5 & 1 \\ -3 & S+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} S+1 & -1 \\ 3 & S+5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{S^2 + 6S + 8} \begin{bmatrix} S+1 & -1 \\ 3 & S+5 \end{bmatrix}$$

دترمینال را همان اول درماتریس ضرب نمی کنیم.

مخرج رابرای ساده ترشدن محاسبه فعلا نگه می داریم و ماتریس را درB و C ضرب می کنیم.

$$[1 \quad 2] \times \begin{bmatrix} S+1 & -1 \\ 3 & S+5 \end{bmatrix} = [S+1+6 \qquad -1+2S+10]$$

$$[S+7 \qquad 2S+9] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = [2S+14+10S+45]$$

$$\left[\frac{12S+59}{S^2+6S+8}\right]$$

معادله دیفرانسیل زیررا درفضای حالت بنویسید :

$$\boldsymbol{y'' + 6y' + 7y = 5u(S)}$$

برای تبدیل به فضای حالت باید ماتریس های زیررا محاسبه کنیم:

$$A = ? \quad B = ? \quad C = ? \quad D = ?$$

$$\left.\begin{aligned} &\to x_1 = y \quad , \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ &\to x_2 = \dot{y} \quad , \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= y \\ x_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} \end{aligned}$$

$$y'' = -6y' - 7y + 5u(S) \to \dot{x}_2 = -6\dot{x}_1 - 7x_1 + 5u$$

ازاین فرمول ماتریس هارامحاسبه می کنیم :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مدل غیرخطی:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

مقادیرویژه:

درتابع تبدیل ریشه های مخرج مقادیر ویژه می باشند.

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{صفر ها}}{\text{ریشه های معادله مشخصه}}$$

←تابع تبدیل

←معادله دیفرانسیل

←ازخودسیستم به فضای حالت برسیم

محاسبه ی مقادیرویژه:

$$|SI - A| = 0 \rightarrow |\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \end{cases}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

رنک این ماتریس 3 می باشد چون مستقل ازهم هستند.

$$|\lambda I - A| = 0$$

برای این حالت می توان λ ها را به قطر اصلی اضافه کنیم سپس تمام علامت ها را برعکس کنیم.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda-5)\big((\lambda+1)(-\lambda)-0\big)-\big(-2(-\lambda-0)\big)+(\lambda-5)(\lambda^2+\lambda)-2\lambda-2=0$$

$$\rightarrow \lambda^3-4\lambda^2-7\lambda-2 \rightarrow$$

برای حل این معادله(بدست آوردن ریشه) بایدکل معادله را بر $\lambda+1$ تقسیم می کنیم :

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-4\lambda^2-7\lambda-2 & \lambda+1 \\ \hline -(\lambda^3+\lambda^2) & \lambda^2-5\lambda-2 \\ \hline 0-5\lambda^2-7\lambda-2 & \\ -(-5\lambda^2-5\lambda) & \\ \hline 0-2\lambda-2 & \\ -(-2\lambda-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda-2) \rightarrow$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda-2)=0$$

به اتحاد چاق و لاغر تبدیل شد.

حل به روش دلتا:

$$\Delta= b^2-4ac \rightarrow \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

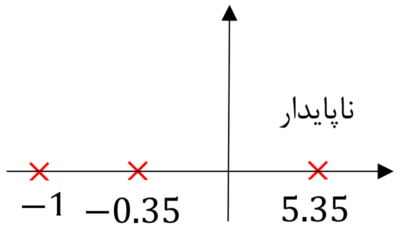
$$a=1 \qquad b=-5 \qquad c=-2$$

$$\Delta= b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(-2)=33$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2} \rightarrow \lambda_2=5.35 \qquad \lambda_3=-0.35 \qquad \lambda_1=-1$$

به دلیل مجزا بودن هرسه ستون رنک ماتریس 3 می باشد که این از λ ها یا مقادیر ویژه نیز مشخص است.

به تعداد مقادیر ویژه ما رنک داریم، اگر مقادیر ویژه ای باهم برابر بود 1 مقدار محاسبه می کنیم.



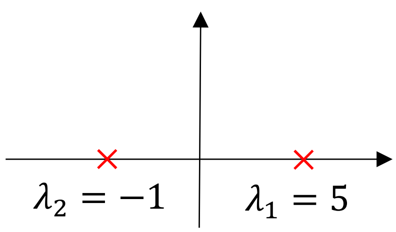
مثال: مقدار مقادیر ویژه را حساب کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

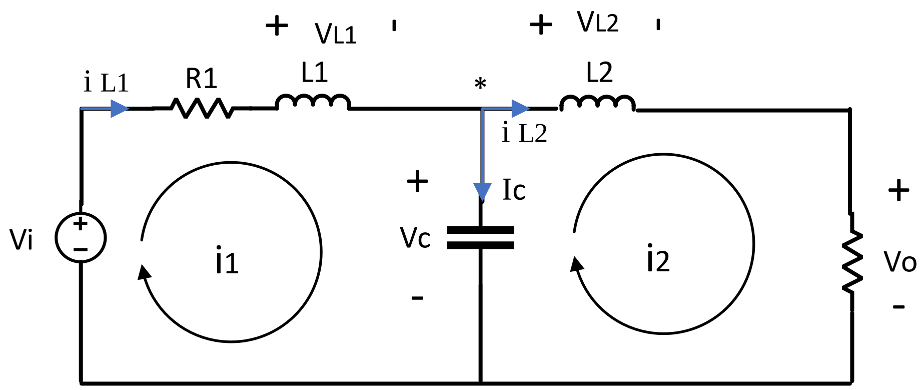
$$|\lambda I - A| = (\lambda - 3)(\lambda - 1) - 8 = \lambda^2 - \lambda - 3\lambda + 3 - 8$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \quad \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1$$



نکته: ما از تابع تبدیل به فضای حالت می رویم تا ورودی را حذف کنیم. اگردرتابع تبدیل صورت تابع که همان ورودی است با یکی از قطب ها برابر باشد دراین صورت باهم حذف می شوند، بنابراین ما از تابع تبدیل به فضای حالت می رویم تا اثر ورودی را درحالی که بایکی از قطب هابرابر است ازبین ببریم.

محاسبه ی فضای حالت از دینامیک سیستم :



$$x = \begin{bmatrix} V_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

KVL → بر حسب ولتاژ → جریان

KCL → بر حسب جریان → ولتاژ

معادله ی مش 1 :

$$-V_i + R_1 i_1 + V_{L1} + V_C = 0$$

معادله ی مش 2:

$$-V_C + V_{L2} + R_2 i_2 = 0$$

معادله ی گره * :

$$i_C = i_1 - i_2$$

نکته:

خازن → جریان تغییر پیدا می کند → ولتاژ معلوم

سلف → ولتاژ تغییر می کند → جریان معلوم

$$V_L = \frac{di_L}{dt} \times L$$

$$i_c = \frac{dV_C}{dt} \times C$$

درسلف و خازن برای محاسبه باید مشتق ولتاژ و جریان معلوم را بنویسیم:

1- $V_{L1} = V_S - R_1 i_1 - V_C = V_S - R_1 I_1 - V_C$
2- $V_{L1} = V_C - R_2 i_2$
3- $i_C = i_1 - i_2 = i_{L1} - i_{L2}$

1- $L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = V_S - R_1 i_{L1} - V_C$
2- $L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = V_C - R_2 i_{L2}$
3- $C \frac{dV_C}{dt} = i_{L1} - i_{L2}$

1- $\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1}(V_S - R_1 i_{L1} - V_C)$
2- $\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2}(V_C - R_2 i_{L2})$
3- $\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}(i_{L1} - i_{L2})$

محاسبه فضای حالت:

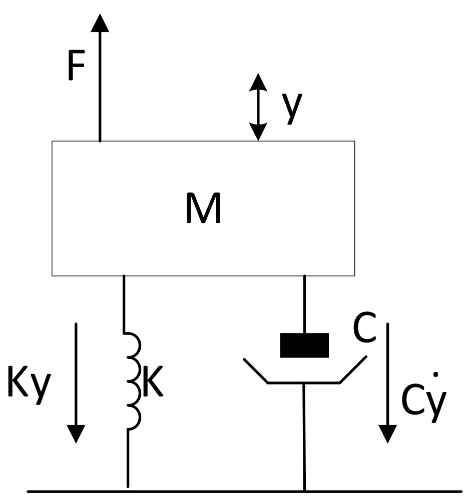
معادله ی خروجی = $V_o = V_{R2} = R_2 i_2 = R_2 i_{L2}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_S$$

ضریب i_{L2} را نمی نویسیم چون درجلو ضرب می شود.

$$V_o = y = C \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ V_C \end{bmatrix} + D = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}$$

عنصر	انرژی	متغیرفیزیکی
خازن C	$\frac{1}{2}CV^2$	ولتاژV
سلف L	$\frac{1}{2}Li^2$	جریان I
جرم M	$\frac{1}{2}MV^2$	سرعت انتقالی V
ممان اینرسی J	$\frac{1}{2}Jw^2$	سرعت چرخشی w
فنرK	$\frac{1}{2}kx^2$	جابه جایی x
تراکم پذیری مایع $\frac{V}{KB}$	$\frac{1}{2}\frac{V.P^2}{KB}$	فشارP
خازن حرارتی c	$\frac{1}{2}C\theta^2$	حرارت θ



با استفاده از قانون دوم نیوتن:

$$\sum F = Ma$$

که درآن $\sum F$ مجموع نیروهای وارد بر جسم M و a شتاب ان می باشد.

$y \rightarrow$ جابه جایی

$V \rightarrow$ سرعت , مشتق اول $\rightarrow \dot{y}$

$a \rightarrow$ شتاب , مشتق دوم $\rightarrow \ddot{y}$

$$\begin{cases} F - Ky - C\dot{y} = Ma \quad \rightarrow F - Ky - C\dot{y} = M\ddot{y} \\ a = \ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x_1} \\ x_3 = \ddot{y} = \dot{x_2} \end{cases}$$

$$\dot{x_2} = \ddot{y} = \frac{1}{M}(F - Ky - C\dot{y}) = \frac{1}{M}(F - Kx_1 - Cx_2)$$

$n \times n \qquad n \times m$

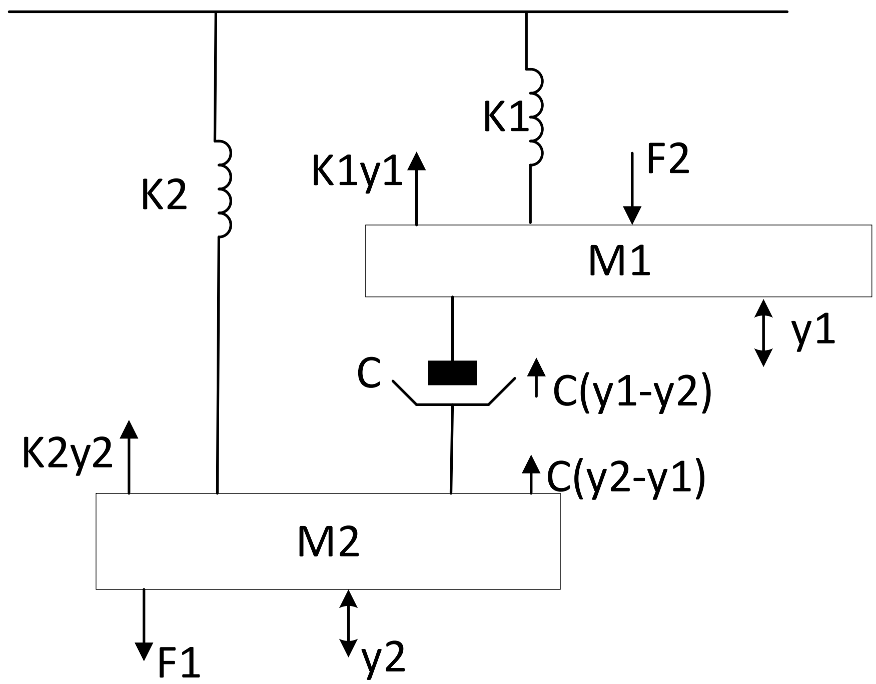
$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$P \times n$

جلسه هشتم

محاسبه ی فضای حالت:



$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 = \dot{x}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

دوتا ازمقدارهای ماتریس a را با استفاده ازاین معادله ها بدست می آوریم.

$$\begin{cases} F_1 - K_1 x_1 - C\frac{d}{dt}(x_1 - x_3) = M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = M_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_2}{dt}\right) = M_1 \frac{dx_2}{dt} \\ F_2 - K_2 x_3 - C\frac{d}{dt}(x_3 - x_1) = M_2 \frac{d\dot{x}_3}{dt} = M_2 \frac{dx_4}{dt} \end{cases}$$

مرحله 1

$$\begin{cases} F_1 - K_1x_1 - C\dot{x_1} + C\dot{x_3} = M_1\dot{x_2} \\ F_2 - K_2x_3 - C\dot{x_3} + C\dot{x_1} = M_2\dot{x_4} \end{cases}$$

مرحله 2

دراین مرحله بایدسمت چپ معادله را برحسب x بنویسیم و مشتقات حذف شود.

$$\begin{cases} F_1 - K_1x_1 - Cx_2 + Cx_4 = M_1\dot{x_2} \\ F_2 - K_2x_3 - Cx_4 + Cx_2 = M_2\dot{x_4} \end{cases}$$

$$\dot{x} = A[x] + Bu$$

$$y = C[x] + D$$

با استفاده از معادله ی اول

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{C}{M_1} & 0 & \frac{C}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{C}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{C}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از معادله ی دوم محاسبه می شود

$$y = C[x] + D$$

فرم کنترل پذیر:

$$G(S)=\frac{b_0S^n+b_1S^{n-1}+b_2S^{n-2}+\cdots+b_{n-1}S+b_n}{S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\cdots+a_n}$$

تابع تبدیل همواره باید monic باشد یعنی ضریب بزرگترین توان مخرج یک باشد(فرم استاندارد) با

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

مخرج تابع تبدیل را ازسمت چپ با علامت منفی درآخرین سطر ماتریس قرار می دهیم که به آن فرم کنترل پذیر گویند.

$$y=[b_n-a_nb_0 \quad b_{n-1}-a_{n-1}b_0 \quad \dots \quad b_1-a_1b_0]x+\mathrm{b0u(t)}$$

این تحقق همواره کنترل پذیر است و درصورتی که تابع تبدیل سیستم قطب و صفر مشترکی نداشته باشد تحقق و روئت پذیر خواهد بود که با Ac نمایش می دهیم.

مثال : سه نوع تحقق متفاوت سیستم با تابع زیر را بنویسید

$$\frac{1}{S^3+10S^2+27S+18}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix}$$

طبق ماتریس قبلی قطر اصلی و سایردرایه های مداررا می نویسیم.

از صورت محاسبه می شود.

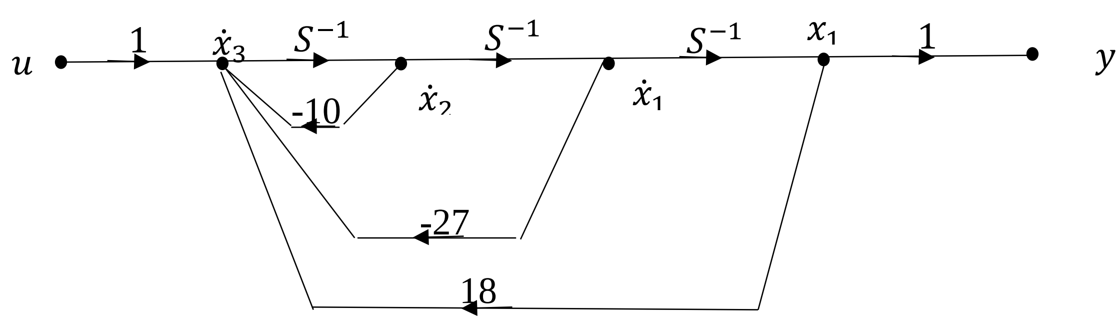
$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C=[1 \quad 0 \quad 0]$$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\dot{x}_3 = -18x_1 - 27x_2 - 10x_3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



بدلیل روش میسون:

$\Delta_j = 1 -$ (حلقه های بدون مسیر پیشرو)

$\Delta = 1 -$ (حلقه های با مسیر پیشرو)

$$M_s = \frac{\sum M_j \Delta_j}{\Delta}$$

به همین دلیل درمثال قبل $S^{-3}\times$کردیم

$$\frac{1}{S^3 + 10S^2 + 27S + 18} \rightarrow \frac{S^{-3}}{1 - (10S^{-1} - 27S^{-2} - 18S^{-3})}$$

فرم روئیت پذیر:

$$G(S)=\frac{b_0S^n+b_1S^{n-1}+b_2S^{n-2}+\cdots+b_{n-1}S+b_n}{S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\cdots+a_n}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & a_n\\ 1 & 0 & \dots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0\\ b_{n-1}-a_{n-1}b_0\\ \vdots\\ b_1-a_1b_0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots 1\end{bmatrix}x+b_0u(t)$$

این تحقق همواره روئیت پذیر است درصورتی که تابع تبدیل، قطب و صفر مشترک نداشته باشد. با A_oنمایش می دهند.Observer

$$A_o=A_C^T$$

$$B_o=C_C^T$$

$$C_o=B_C^T$$

چون ستون است رویت پذیر

برای مثال قبل $\rightarrow A_o=A_C^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & -18\\ 1 & 0 & -27\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

$$B_o=C_C^T=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad C_o=B_C^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

درحالت میسون همه را وارون می کند. اگر را به روش میسون از آخر به اول رسم کنیم فرم روئیت پذیر به دست می آید. این یک مفهوم دوگان بین فرم روئیت پذیر و کنترل پذیر می باشد (تجزیه ی کانونیکال)

ماتریس A را در نظر بگیرید اسکالر لاندا را یک مقدار ویژه از ماتریس A می‌نامند اگر یک بردار غیر صفر x به نحوی وجود داشته باشد:

$$Ax = \lambda x$$

به بردار غیر صفر x که این رابطه را برقرار می‌سازد بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه گفته می‌شود.

$\Delta(\lambda) \triangleq |\lambda I - A| = \emptyset \rightarrow$ معادله مشخصه

معادله مشخصه:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 1 = 5u(t)$$

عکس تبدیل لاپلاس

$$S^2 + S + 1 = 0 \quad \rightarrow C\,h = \ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\frac{1}{S+a} = e^{\overset{\lambda}{(-a)} t}$ یادآوری عکس لاپلاس

λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه های ما هستند که از معادله مشخصه به دست می‌آیند همچنین فرکانس طبیعی، مودهای سیستم، پایداری، تبدیل لاپلاس در درس کنترل خطی بحث می‌کنیم.

$$\frac{1}{S^3 + 10S^2 + 27S + 18} \rightarrow G(S)$$

معادله مشخصه در تابع تبدیل

$$(S+1)(S+6)(S+3)$$

$|\lambda I - A| = 0 \quad \rightarrow$ معادله مشخصه در فضای حالت

* سیستم‌هایی که در آنها مقاومت و جرم است ،جبری می‌باشد (خطی)

$Ax = b \quad \rightarrow$ خطی (شیب)

حال اگر مدارها به سمت موهومی رفت سلف، خازن، فنر و دمپر:

که در آن مشتق و انتگرال وجود دارد:

$Ax = \lambda x \quad \rightarrow$ مشتق و انتگرال $\rightarrow$ غیر خطی

$(\lambda I - A)x = 0$

$Ax = 0$ خبرخطی

$x = \cdots$ فضای پوچ

مقادیر ویژه:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow \lambda_1 = ? \\ \rightarrow \lambda_2 = ? \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} (\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \\ (\lambda_2 I - A)x_2 = 0 \end{matrix} \right.$$

کار بسیار سختی است

از دو روش گرامر یا حذف گوسی می‌توان این دو معادله دو مجهول را به دست آورد.

۱. روش کلی اول استفاده از رابطه ی زیر:

$$\Delta(\lambda) \triangleq |\lambda I - A| = 0$$

۲. در ماتریس های 2×2 معادله مشخصه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) \times \lambda + det(A)$$

مثال

$trace$: جمع عناصر قطر اصلی

1 $(a + d) = trace(A)$

2 $ad - bc = det(A)$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |\lambda I-A|=0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-a & -b \\ c & \lambda-d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-a & -b \\ c & \lambda-d \end{bmatrix}=0$$

فرمول دترمینان قطر اصلی ضرب در قطر فرعی

$$\rightarrow \quad \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} (\lambda-a)(\lambda-d)-(-b)(-c)=\lambda^2-d\lambda-a\lambda+ad-bc$$
$$=\lambda^2-\lambda(a+d)+ad-bc$$

۳. روش تحقق :اگر تحقق به صورت کانونیکال کنترل پذیر باشد معادله مشخصات رابطه زیر به دست می‌آید:

$$G(S)=\frac{1}{S^3+10S^2+27S+18}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x$$

$$S^3+10S^2+27S+18=0 \begin{cases} \lambda_1=(S+1)=\lambda_1=-1 \\ \lambda_2=(S+6)=\lambda_1=-6 \\ \lambda_3=(S+3)=\lambda_1=-3 \end{cases}$$

روش تقسیم →

٤. نوشتن معادله مشخصه از روی فرم قطری:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow (S-\lambda_1)(S-\lambda_2)=\Delta(\lambda)$$

۵. نوشتن معادله مشخصه از روی جردن

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow (S-\lambda_1)^2=\Delta(\lambda)$$

λها باید یکی باشند

به دست آوردن بردارهای ویژه به دو دسته زیر تقسیم بندی می‌شوند:

۱- متمایز ۲- تکراری

برای یک ماتریس 2×2 مقدار ویژه λ_1 و λ_2 داریم اما شاید دو بردار ویژه x_1 و x_2 نداشته باشیم. به خاطر همین بردار ویژه تعمیم یافته به دست می‌آوریم (ریشه‌های تکراری)

۱) مقادیر ویژه تعمیم یافته به روش مینور:

ابتدا مینور ماتریس $(\lambda I - A)$ را به دست می‌آوریم λ را یک پارامتر در نظر می‌گیریم. سپس هر ستون مستقل را با جایگذاری λ به عنوان یک بردار ویژه در نظر می‌گیریم:

$$\overset{\text{مینور}}{adj}(\lambda I - A) = \underbrace{C^T}_{adj}(\lambda I - A)$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} = d(-1)^2 & M_{12} = c(-1)^3 \\ M_{21} = b(-1)^3 & M_{22} = a(-1)^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} - C^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

مثال: قسمت بدون تحریک مدل فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

مقادیر ویژه و بردار ویژه را محاسبه کنید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \text{کنترل پذیر}$$

$$\text{معادله مشخصه} \quad \rightarrow \quad G(S) = \frac{1}{S^3 + 10S^2 + 27S + 18}$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه باید تقسیم کرد.

$$\begin{array}{l|l} \Delta = S^3+10S^2+27S+18 & (S+1) \\ \hline -(S^3+10S^2+27S+18) & (S+3)(S+6) \\ \hline \end{array}$$

$$(S+1)(S+3)(S+6) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -6 \\ \lambda_3 = -3 \end{matrix}$$

*مینورهای هر کدام را حساب می‌کنیم:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 27 & \lambda+10 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+10) - (-1)(27) = \lambda^2 + 10\lambda + 27 \times (-1)^2$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 18 & \lambda+10 \end{bmatrix} = 0 - (-1)(18) = 18$$

$$18 \times (-1)^3 = -18$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 18 & 27 \end{bmatrix} = 0 - (\lambda)(18) = -18\lambda = 18\lambda \times (-1)^4 = -18\lambda$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 27 & \lambda+10 \end{bmatrix} \times (-1)^{2+1} = \lambda + 10$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 18 & \lambda+10 \end{bmatrix} \times (-1)^{2+2} = \lambda^2 + 10\lambda$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 18 & 27 \end{bmatrix} \times (-1)^{2+3} = (27\lambda + 18) \times (-1) = -27\lambda - 18$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{bmatrix} \times (-1)^4 = +1$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \times (-1)^5 = +\lambda$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \times (-1)^6 = \lambda^2$$

*ماتریس مینورها:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 10\lambda + 27 & -18 & -18\lambda \\ \lambda + 10 & \lambda^2 + 10\lambda & -27\lambda - 18 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 10\lambda + 27 & \lambda + 10 & 1 \\ -18 & \lambda^2 + 10\lambda & \lambda \\ -18\lambda & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه بردار ویژه فقط کافی است یک ستون $adj(\lambda I - A)$ را انتخاب کنیم و λ ها را در آن ستون قرار دهیم:

* در ستون آخر ریشه‌ها را معادل ریشه را قرار می‌دهیم:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \to V_1$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} \to V_2$$

$$\lambda_3 = -6 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 36 \end{bmatrix} \to V_3$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix} \quad \to \text{بردار ویژه}$$

ماتریس فندرموند

اگر ماتریس A به فرم کانونیکال (رویت پذیر و کنترل پذیر) باشد و مقادیر ویژه آن متمایز باشند، آنگاه ماتریس بردارهای ویژه به سادگی از طریق ماتریس فندرموند حاصل می‌شود.

$$V = 2 \times 2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$V = 2 \times 3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$ → فندر موند →

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix}$$ → کنترل پذیر →

$$G(S) = \frac{1}{S^3 + 10S^2 + 27S + 18} = \frac{1}{(S+1)(S+3)(S+6)}$$

$$(S+1)(S+3)(S+6)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$ → بردار ویژه →

*هرچه تعداد سطر و ستون ماتریس بیشترباشد توان سطرآن (توان λ ها) بیشتر می‌شود. (4×4) ← توان ۳

زمانی که مقادیر ویژه تکراری باشند:

یک ست کامل از بردارهای ویژه یا وجود دارد یا وجود ندارد.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{array}\right\}$$ → تکراری →

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 \\ \\ \to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \end{array}$$

تعداد بردارهای ویژه مستقل که با مقادیر ویژه مکرر m در ارتباط هستند برابر با بعد فضای پوچ ماتریس $(\lambda I - A)$ است یعنی:

ستون ماتریس

$$q_1 = n - rank(\lambda I - A)$$

بردار ویژه تعمیم یافته داریم $q \neq m$

بردار ویژه تعمیم یافته نداریم $q = m$

$$1 \leq q_i \leq m_i$$

مراحل محاسبه ماتریس معکوس:

ماتریس معکوس $\rightarrow det \rightarrow minor \rightarrow Cofactor \rightarrow C^T \rightarrow adj \rightarrow inverse$

ادامه فضای پوچ:

$$nullspace(\lambda I - A) \rightarrow (\lambda_i I - A)x_i = 0$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_6 \end{bmatrix}$ یا و $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{bmatrix}$

$det = 0$ $\qquad$ $det = 0$

ماتریس فول رنک دترمینالش غیر صفر می‌شود. یعنی سه سطر مستقل داریم.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \rightarrow det = 1.5$$

چون دترمینالش غیر صفر شده فول رنک است.

هر سه ستون مستقل از هم هستند. رنک را ستونی در نظر می‌گیریم.

بعد فضای پوچ:

بعد فضای پوچ $= n - r$

ستون ها $\qquad$ رنک

فضای پوچ:

$$Ax = 0$$

$$Ax = \lambda x \ \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

*حالا نیاز به فضای پوچ داریم. $(n - r)$ است.

مثال: مقادیر ویژه بردارهای ویژه را حساب کنید:

- روش ۱

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$G(S) = \frac{1}{S^2 + 4S + 3} \quad \rightarrow (S + 3)(S + 1)$$

مقادیر ویژه

$$S_1 = -3 \qquad S_2 = -1$$

بردار ویژه به روش فندرموند

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- روش ۲ روش گوسی:

$$\lambda^2 - trace|A|\lambda + detA = 0$$

$trace|A| =$ جمع عناصر قطر اصلی $\rightarrow 0 + (-4) = -4$

$$\det A = 0 - (-3) = 3$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - (-4)\lambda + 3 \quad \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

- روش ۳

$$\lambda^2 + b\lambda + a = 0 \quad \rightarrow \Delta(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

- روش ۴ گرامر

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda)(\lambda+4)-(-3)=0 \qquad \rightarrow \lambda^2+4\lambda+3=0$

$(\lambda+3)(\lambda+1)=0 \qquad \rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-3\end{array}\right\} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$

مقادیرویژه محاسبه شده

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix} \qquad \rightarrow$ اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$\rightarrow adj(A)=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$\rightarrow \lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 3 & \lambda+4\end{bmatrix} \qquad \rightarrow adj(\lambda I-A) \quad \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda+4 & +1\\ -3 & \lambda\end{bmatrix}$

rank را در این ماتریس محاسبه می‌کنیم   سطرها مستقل هستند

نکته: rank را از $\lambda I-A$ بدست می آورید. بردار ویژه را از $adj(\lambda I-A)$

برای اینورس : $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$

برای بردار ویژه : $(adj)=C^T$

ادامه حل روش (4):

$rank \ \rightarrow r$

پوچ فضای بعد $=0 \quad \rightarrow n-r=2-2=0$

حال λ ها را در ستون ها قرار می دهیم و بردار ویژه را حساب می کنیم:

نکته: می توانیم λ هارا درهرستون قرار دهیم فرقی نمی کند:

$\lambda_1=-1 \quad \rightarrow \quad V_1=\begin{bmatrix}\lambda+4\\ -3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}3\\ -3\end{bmatrix}$

$\lambda_1=-3 \quad \rightarrow \quad V_1=\begin{bmatrix}\lambda+4\\ -3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$

$\rightarrow V=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -3 & -3\end{bmatrix}$

بردارویژه

$\lambda_1=-1 \quad \rightarrow \quad V_1=\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-3 \quad \rightarrow \quad V_1=\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$

$\rightarrow V=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$

بردارویژه

مثال: مقادیر ویژه و بردار های ویژه ی ماتریس زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

مرحله 1:

روش اول $\rightarrow |\lambda I - A| = 0 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3) - (-4) = 0 \quad \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - \lambda - 3 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \rightarrow$ λ ها برابر شد

روش دوم $\rightarrow \lambda^2 - trace(A)\lambda + det(A) = 0$

$$\lambda^2 - (1 - 3)\lambda + (-3) - (-4) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$$

مرحله 2:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rank} \lambda = -1 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} -1 - 1 & -2 \\ 2 & -1 + 3 \end{bmatrix}$$

Rank=1

مرحله 3:

$$q = n - rank(\lambda I - A)$$

$q = 2 - 1 = 1 \quad \rightarrow q = 1 \quad \rightarrow \qquad V_1 =$ یک بردار ویژه

$V_2 =$ یک بردار ویژه تعمیم یافته

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \rightarrow adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3 & 2 \\ -2 & -1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بردار ویژه}}$ پس V_2 را نمی توان نوشت چون یکی است

حالا $\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ از یک ستون مشتق می گیریم

$\rightarrow \ \frac{d}{dy}\begin{bmatrix}\lambda+3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow$ بردار ویژه ی تعمیم یافته

$V_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow$ V_2 بردار ویژه $\rightarrow V=\begin{bmatrix}2&1\\-2&0\end{bmatrix}$

اگر هردو ستون یکی نبود باید از ستونی مشتق بگیریم که V_1 را نوشته ایم.

روش های دیگر بردار ویژه ی تعمیم یافته:

$Ax=0 \quad \rightarrow V_1$

$AV_2=V_1 \quad \rightarrow V_2$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}4&2&1\\0&6&1\\0&-4&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |\lambda I-A|=0 \quad \begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix}=a\begin{vmatrix}d&e\\0&f\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}0&e\\0&f\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}0&d\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow a(df-0)-b(0-0)+c(0-0)=adf$$

$$\begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{bmatrix}=0 \ \rightarrow (\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-6&-1\\4&\lambda-2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}0&1\\0&\lambda-2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}0&\lambda-6\\0&4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)[(\lambda-6)(\lambda-2)-(-4)]+0+0=0$$

$$(\lambda-4)[\lambda^2-2\lambda-6\lambda+12+4]=(\lambda-4)(\lambda-4)^2=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=4\\ \lambda_2=4\\ \lambda_3=4\end{cases}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

rank=1

$$q = n - r = 3 - 1 = 2$$

1 بردار ویژه مستقل

2 بردار تعمیم یافته

$adj(\lambda I - A) \ \rightarrow C = (-1)^{i+j} = M_{ij}$ ....

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -1 \\ 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda-2) - (-4) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda-4)^2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (-2\lambda+4) - (-4) = -2\lambda + 8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(4) - 0 = 4\lambda - 16$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ \lambda-6 & -1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) - 0 = \lambda - 4$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 4$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-6) = \lambda^2 - 10\lambda + 24$$

$$C = \begin{bmatrix} (-1)^2(\lambda-4)^2 & (-1)^3 0 & (-1)^4 0 \\ (-1)^3(-2\lambda+8) & (-1)^4(\lambda-4)(\lambda-2) & (-1)^5(4\lambda-16) \\ (-1)^4(\lambda-4) & (-1)^5(-\lambda+4) & (-1)^4(\lambda-4)(\lambda-6) \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}(\lambda-4)^2 & 0 & 0\\ 2\lambda-8 & (\lambda-4)(\lambda-2) & -4\lambda+16\\ \lambda-4 & \lambda-4 & (\lambda-4)(\lambda-6)\end{bmatrix}$$

$$C^T=\begin{bmatrix}(\lambda-4)^2 & 2\lambda-8 & \lambda-4\\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & \lambda-4\\ 0 & -4\lambda+16 & (\lambda-4)(\lambda-6)\end{bmatrix}$$

$$adj(\lambda I-A)=C^T=\begin{bmatrix}(\lambda-4)^2 & 2\lambda-8 & \lambda-4\\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & \lambda-4\\ 0 & -4\lambda+16 & (\lambda-4)(\lambda-6)\end{bmatrix}$$

$$adj(\lambda I-A)\quad_{\lambda=4}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\lambda}=adj(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}2\lambda-8 & 2 & 1\\ 0 & 2\lambda-6 & 1\\ 0 & -4 & 2\lambda-10\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&2&1\\0&-2&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}\rightarrow V_1 \text{ بردار ویژه ی}$$

$$rank=1$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\big(adj(\lambda I-A)\big)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

حتما از ستونی که V_1 را انتخاب کردیم بعداز مشتق دوم همان ستون V_2می شود. وبرای بردار ویژه ی V_3 فرقی نمی کند کدام ستون را انتخاب کنیم.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow V=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad V_3\quad V_2$$

فرمول کلی برای محاسبه ی بردار ویژه ی تعمیم یافته :

$$\frac{1}{(m_i-1)!}\left\{\frac{d^{mi-1}}{d^{mi-1}}[adj(\lambda I-A)]\right\}\quad\rightarrow\lambda=\lambda_i$$

ماتریس مشابه همانندی (مُدال)

ماتریس مشابه: یکی از مهم‌ترین قسمت های جبرخطی در حوزه مقادیر ویژه و بردار ویژه در قطری‌سازی یک ماتریس توسط بردارهای ویژه آن است.

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Longrightarrow v^{-1}Av = \Lambda =$ مجزا}

$v = S \Longrightarrow v^{-1}Av = \Lambda$ یا λ

$S =$ ماتریس بردارهای ویژه

$\Lambda =$ ماتریس مقادیر ویژه (ماتریس قطری یا جردن است)

مهم: ماتریس معکوس‌پذیر M

$M = v = S$ را در نظر بگیرید:

$B = M^{-1}AM | B = MAM^{-1} \longrightarrow A = MBM^{-1}$

A و B.مشابه است پس جابجایی انجام می‌شود

تبدیل همانندی که در ماتریس قطری‌سازی انجام می‌شود را مُدال می‌گوییم.

اگر مقادیر ویژه‌ها مساوی باشند می‌گوییم ماتریس‌ها مشابه هستند.

بردارهای ویژه مستقل تغییر نمی‌کند.

$\begin{cases} B = M^{-1}AM \\ B = MAM^{-1} \end{cases}$ خاصیت جابجایی دارند

روش تغییر متغیر:

$Ax = \lambda x \Longrightarrow A$ به جای $\Longrightarrow$ سیستم جدید $\Longrightarrow M^{-1}xMBM^{-1}xM^{-1}x = \lambda x$

دیگر بردار ویژه حل x نیست حل $M^{-1}x$ می‌باشد تغییر می‌کند

ضرب M^{-1} در طرفین $\Longrightarrow BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x \Longrightarrow Bx_n = \lambda x_n = x_n = M^{-1}xn \Longrightarrow$

مهم $\Longrightarrow M^{-1}x = xn$ $\qquad M^{-1}.M = I = 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تبدیل همانندی (Q): رابطه‌ای بین دو ماتریس مربعی A و B به فرم $B = Q^{-1}Aq$ برای ماتریس‌های غیر تکی‌ان $(nonsingular)$ یا فول رنک یا دترمینان آن غیرصفر باشد در حالت خاصی که ماتریس B که تبدیل به یک ماتریس قطبی می‌شود ماتریس مُدال نقش q را بازی می‌کند.

فقط در اینجا Q به این صورت است

$$Q \text{یا} q = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

در تبدیل همانندی برای طراحی دیگر نیاز نیست Q بردار ویژه باشد (کنترل ناپذیر بود و کنترل پذیر شود) در حالتی که بردارهای ویژه بصورت متقابل بر یکدیگر عمود باشند و تشکیل پایه‌های متعامد دهند در اینصورت طبق خاصیت تعامد در ماتریس‌ها خواهیم داشت دیگر نیازی به اینورس نیست.

$$Q^T = Q^{-1}$$

$$\Lambda = Q^T A Q$$

هر ماتریس مُدال یک تبدیل همانندی است آیا همه تبدیل همانندی برای قطری‌سازی بکار می‌رود؟ خیر برای تبدیل به فرم رویت پذیر و کنترل پذیر بکار می‌رود و فقط برای قطری سازی از بردارهای ویژه استفاده می‌کنیم.

مثال) ماتریس گذر حالت به روش کیلی همیلتون برای ماتریس زیر را به دست آورید.

الگوریتم حل به روش کیلی همیلتون:

۱) مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورید.

۲) اگر مقادیر ویژه مجزا باشند نیاز به حل n معادله همزمان زیر خواهیم داشت

۳) اگر مقادیر ویژه تکراری بودند معادلات مستقل را نیز محاسبه کنید.

۴) ضرایب مجهول بدست آمده را در معادله زیر جایگزین کنید.

ماتریس انتقال به روش کیلی همیلتون:

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$۲ \times ۲ = \propto_0 + \propto_1 \lambda_1$

$3 \times 3 = \propto_0 + \propto_1 \lambda_1 + \propto_1 \lambda_1^2$

$$1)\ \lambda^2 - trace^A \lambda + detA \longrightarrow \underbrace{\lambda^2 2\lambda + 1}_{(\lambda-1)(\lambda-1)} = 0 \begin{cases} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = +1 \end{cases}$$

$f(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} = e^t = \propto_0 + \propto_1 \longrightarrow \propto_0 = e^t - te^t \longleftarrow \lambda$ مشتق نسبت به

$$\frac{dt}{d\lambda}[f(\lambda_2)] = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda_2 t} = \propto_0 + \propto_1 \Longrightarrow te^{\lambda_1 t} + te^t = \propto_0 + \propto_1$$

$$\frac{dt}{d\lambda}[f(\lambda_2)] = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda_2 t} = \frac{d}{d\lambda}(a_0 + a_1 + \lambda_1) \longrightarrow te^t = \propto_1$$

مثال) تبدیل همانی پیدا کنید که سیستم زیررا به فرم مدال تحلیل کنید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

به ازای هرمقدار ویژه باید یک دستگاه معادله یک مجهول را محاسبه کنید. کار سختی است.

$$\left.\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ (\lambda I - A)\, x &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

فضای پوچ

حل به روش adj :

$adj \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ برای ماتریس 2×2

$$adj_{3\times3} = C^T \xrightarrow[\text{مرحله 2}]{} (\lambda I - A) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 3 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$3\ \text{مرحله} \rightarrow (-1)^{i+j} M_{ij} \rightarrow detM_{11} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)(-1)^2$$

$$1\ \text{مهم مقادیر ویژه} \rightarrow \lambda+2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} + 0 = 0$$

$$\rightarrow (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda+3) = 0 \rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -3$$

$$3\ \text{ادامه مرحله} \rightarrow detM_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \lambda+4 \end{bmatrix} = 0$$

$$detM_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$detM_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \lambda+4 \end{bmatrix} = 2\lambda + 8$$

$$detM_{22} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+4)$$

$$detM_{23} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3\lambda + 6$$

$$detM_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \lambda & -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$detM_{32} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\lambda - 2$$

$$detM_{33} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 3 \\ 0 & \lambda+4 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda$$

$$C = \begin{bmatrix} (\lambda+1)(\lambda+3) & 0 & 0 \\ -2\lambda-8 & (\lambda+2)(\lambda+4) & -3\lambda-6 \\ -2 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$adj = C^T = \begin{bmatrix} (\lambda+1)(\lambda+3) & -2\lambda-8 & -2 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda+4) & \lambda+2 \\ 0 & -3\lambda-6 & \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1+2 \\ (-1)^2+2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -1$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2+2 \\ (-2)^2 + 2(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -2$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3+2 \\ (-3)^2 + 2(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = -3$$

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_n = M^{-1}AM = J_n$$

$$B_n = M^{-1}B$$

$$C_n = CM$$

نکته:

$$M^{-1}{}_{2\times 2} = \frac{1}{det|A|}\ adjM = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$M = V \ \rightarrow$ ماتریس بردار ویژه است $\ \rightarrow M \ \rightarrow M^{-1} \ \rightarrow V = V^{-1}$

$$M^{-1} = \frac{C^T}{detM} \ \rightarrow V = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$detM = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 =$ دترمینان

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -6 - (2) = -8$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad C^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-4}[C^T]$$

$$A_n = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -4-12 & 8-16 \\ 0 & 6 & 6+8 \\ 0 & 6 & -2+8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8-16+8 & 8+16-24 \\ 0 & 6-2 & -6+6 \\ 0 & 6-6 & -6+18 \end{bmatrix}$$

$$A_n = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_n = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-1 & -2-1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & -3 \\ 0.5 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

ادامه مثال تبدیل همانند:

ولی

M^{-1} =برای نیازداریم $\Rightarrow B_n = M^{-1}\mathrm{B}$

M =برای نیازداریم $\Rightarrow C_n = C_M$

Λلاندابزرگ $\Rightarrow \Lambda = A_n = M^{-1}AM = J_n$

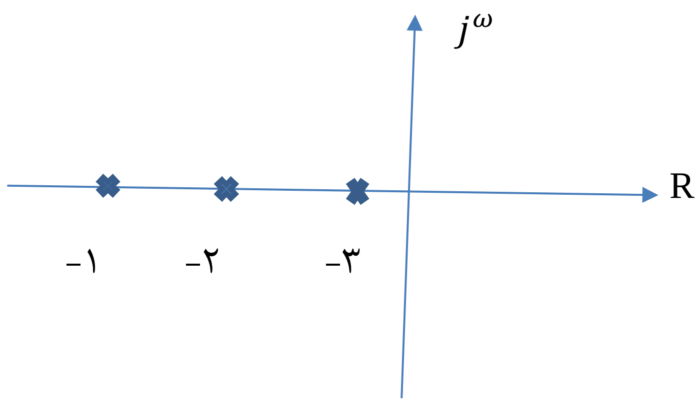
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

J ماتریس $=\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & o \\ & \lambda_2 & \\ o & \lambda_3 & \end{bmatrix}$

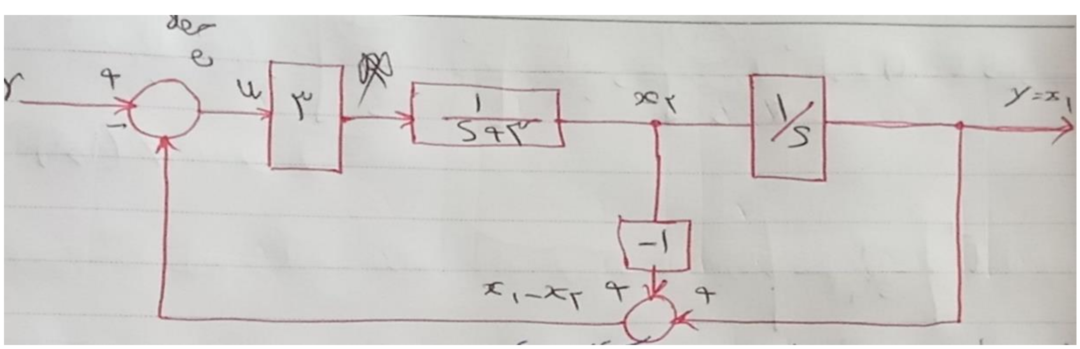
ماتریسj راراحت می تواتیدبنویسید.

ازمقادیرویژه می فهیم که سیستم پایداراست.

قطب سمت چپ محور j_ωسیستم پایداراست.



ماتریس انتقال حالت رامحاسبه کنید.?=STM



*درفضای لاپلاسxهارابه صورت بزرگ نوشته می شود:

بامحاسبه روش میسیون:

SFGروش$\Rightarrow \frac{X_{2(S)}}{U(S)} \neq \frac{1}{S+3}$

$\frac{x_{1(s)}}{x_{2(s)}} = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad$ U=$x_{2(s)}[\,s+3]$

U(s)=3$[R-(x_1-x_2)]$

طرفین وسطین$\Rightarrow\frac{X_2(S)}{U(S)} \Rightarrow U(S) = X_2(S) = [S+3]$

بردن درحوزه زمان$\Rightarrow x_2 + 3\cancel{x_2} = 3r - 3x_1 + 3\cancel{x_2}] \Rightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = 3x_1 + 3r \end{cases}$

$\dot{x_1} = x_2$

$\Rightarrow$A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\Delta(\lambda)=\lambda^2+3=0\begin{cases} \lambda_1 = +\sqrt{3}J \\ \lambda_2 = -\sqrt{3}J \end{cases} \Leftrightarrow$

روش۱ $\quad \mathcal{L}^{-1}\{(SI-A)^{-1}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C^T(SI-A)}{\det(SI-A)}\right\}\Rightarrow\frac{C^T(1,2)}{\det(SI-A)}$

- ✓ $\Rightarrow$(SI-A) $\Rightarrow\frac{1}{S^2+3}\begin{bmatrix} S & +1 \\ -3 & S \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{S^2+3}$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+3}\right\} =?$

یادآوری: $\frac{a}{s^2+a^2} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \sin at$

پس$\Rightarrow l^{-1}\left\{\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} sin\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} sin\sqrt{3}t$

یادآوری $\qquad {}^1/_3\,\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}$

$\frac{s}{s^2+a^2} \rightarrow^{l^{-1}} \cos at$

برای محاسبهAn نیازی به M^{-1} وM زیرا برابر با ماتریس جردن می باشد.

ماتریس جردن یعنی یعنی مقادیرویژه روی قطری اصلی وبقیه مقادیرمی باشد.

An=Jn

اما محاسبه Cn ما نیاز به ماتریس بردارویژه (M یاV) نیازداریم.

$$C_n = C_M$$

برای Bn حتماM^{-1} و M راحساب محاسبه کنید.

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{X_1}{X_2} \Rightarrow \frac{1}{S}$$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ +3 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (-3) = \lambda^2 + 3$

$(\lambda I - A)$

$(SI - A)$

$$\text{روش } 2 \quad \frac{1}{detA}\left[\boxtimes_{\text{جابجا}}\right]$$

کنترل پذیری رابطه متغیرهاورودی

$$B^{\text{ورودی}} \Rightarrow A^{\text{متغیر}}$$

رویت پذیر: ارتباط بین متغیرخروجی

$$C^{\text{خروجی}} \Rightarrow A^{\text{متغیر}}$$

ورودی $U \to^{B} \sum \to^{C} y$

A

$X = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

ماتریسD هیچ تفاوتی درکنترل پذیری ورویت پذیری ندارد، فقط یک نگاشت است که خروجی به ورودی وصل می کند.

تعریف کنترل پذیر:ازیک شرایط اولیه دیگردریک بازده زمانی مشخص به یک شرایط اولیه دیگربرویم یعنی بتوانیم دربین شرایط اولی هاجابه جایی رخ بدهیم.

ماتریس کنترل پذیر:

$P=[A \quad AB \quad A^2B]$

تعریف رویت پذیر: یک سیستمLTI رویت پذیرمی باشد. اگر شرایط اولیه متغیرهای حلت را بتوان به صورت یکتا از اطلاعات مربوط در محدوده زمانی تعیین نمود.

یعنی خروجی یا متغیرهای حالت در خروجی رویت شود یا State

$$\xrightarrow{\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}}$$

$\searrow$u (t),y(t)

یعنی observer

فرمول رویت پذیر:

$$\boldsymbol{\phi}=0=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$Bn=M^{-1}B$

$Cn=C_M$

مثال: کنترل پذیری سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فرم همراه کنترل پذیراست= CCF

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} (\lambda + 1) = 0 \Rightarrow -1 = \lambda_1 \\ (\lambda + 2) = 0 \Rightarrow -2 = \lambda_2 \end{cases}$$

بردارویژه$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{detM} \times C^T$

$$M^{-1} = \frac{1}{(-2)+1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ +1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}=\Lambda q+M^{-1}B \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$M^{-1}B=$ هیچ سطری صفری نداردپس سیستم $M^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

کنترل پذیراست $ctrb$: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$

چنانچه این سطرهانسبت به مستقل خطی باشندمی گوییم سیستم کنترل پذیرکامل حالت است.

دیگربرای کنترل پذیری فقط می رویم به $M^{-1}B$ نگاه می کنیم فقط به ماتریس Bn

مثال: تشخیص کنترل پذیری

$Bn=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}ctrb$ نیست ×

$Bn=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}ctrb$ نیست ×

$Bn=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}ctrb$ هست ✓

*خیلی مهم مثال:بررسی کنترل پذیررویت پذیری ازروی تابع تبدیل

$G(S)=\frac{s+0.8}{(s+0.8)(s+0.5)}\Rightarrow \dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0.4 & -1.3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\ /\ y[0.8\quad 1]x$

$\Delta(s)+(s+0.8)(s+0.5)\Rightarrow\Delta(s)=\xLeftrightarrow[\text{همیشه ثابت است}]{s^2=1.3s+0.4}$

$\Rightarrow$ پس $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.4 & -1.3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$\xrightarrow{G(s)\text{صورت}} y=[0.8\quad 1]x$

می شود تحقق CCF ⇐ فرم تحقق کنترل پذیر:

$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.4 & -1.3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$y=[0.8\quad 1]x$

فرم تحقق رویت پذیر OFC:

$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -0.4\\1 & -1.3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0.8\\1\end{bmatrix}u$

$y=[0\quad 1]x$

$$\begin{cases}A^T+C^Tu\\ y=B^T\end{cases}$$

پس برای بردن فرم کنترل پذیربه رویت پذیرباشد A^T شود B=C^T و C=B^T می‌شود.

تحقق رویت پذیری برای ⇒CCF=$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [0.8 \quad 1]x$

ماتریس فرم کنترل پذیری

تحقق رویت پذیر⇒q= $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$ ستونی $\xRightarrow{\text{بررسی رنک}} rank = 1$

CA=$[0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} = [-0.4 \quad -0.5]$ سیستم رویت پذیرنیست:

تحقق رویت پذیر⇒P=$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{بررسی}}$ رنک سطری $rank = 1$

AB= $\begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.5 \end{bmatrix}$. سیستم کنترل پذیرنیست

کنترل پذیر⇒$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0 & -0 \end{bmatrix} = A$

B=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

C=$[b_n - a_n b_0 \qquad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \dots . = b_1 - a_1 b_n]$ رویت پذیر

A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = A_x + B_u$

B=$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = A^T x + C^T u \\ y = B^T x + 0 \end{cases}$

C=$[0.8 \quad 1\ ] \qquad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} U \\ y = [0 \quad 1]x \end{cases}$

اگرتمام transpose را A.B,C کنیم رویت پذیر به دست می آید.

[تابع تبدیل به فضای حالت دقت شود]

$C = [\text{عددهای}]$

$P = [B \quad AB]$

A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$

C=$[0 \quad 1]$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱. کنترل پذیری نوشتن تابع تبدیل
۲. نوشتنC,B,A
۳. محاسبه تحقق های کنترل پذیری

P=$[B \quad AB \quad A^2B]$

۴.محاسبه ی تحقق رویت پذیر

q=$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$

پایان جلسه

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان