کنترل مدرن

جلسه نه تا چهارده

مشاهده جزئیات بیشتر **اسکن کنید**

جزوه استاد گرامی دکتر برزمینی

کنترل مدرن

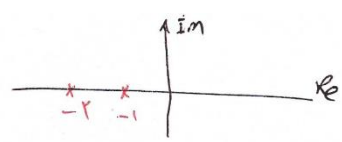
کنترل کلاسیک ← مبنای مدل‌سازی تابع تبدیل → $G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{Q(s)}{P(s)}$

اهداف اصلی کنترل
- پایداری
- تنظیم‌سازی
- طراحی

قطب ← ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل

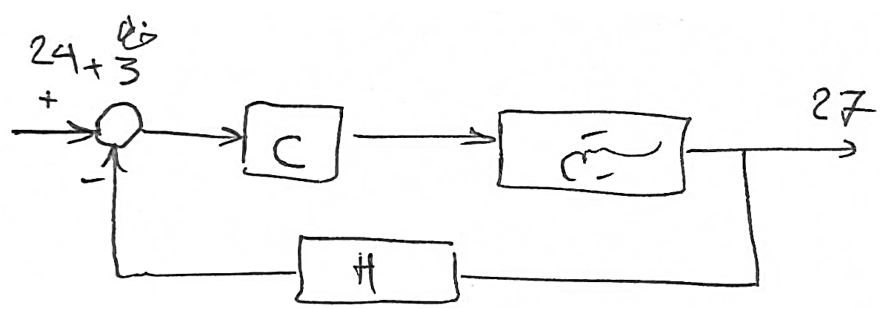
کلاسیک ← بررسی تابع تبدیل ← قطب سمت چپ ← پایدار

شرط پایداری ← قطب‌های تابع تبدیل ← دارای ریشه‌های حقیقی اکیداً منفی باشد.



$$G(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

تنظیم‌سازی



در تنظیم‌سازی کلاسیک ← شیفت قطب‌ها برای رسیدن به مورد دلخواه ← پایداری را دستخوش تغییر قرار نمی‌دهیم

تعقیب ← در کنترل بهینه تدریس می‌شود

ایراد اصلی کنترل کلاسیک ← تابع تبدیل است ← نسبت خروجی به ورودی ← از داخل سیستم اطلاع زیادی نداریم

کنترل مدرن ← با استفاده از مدل فضای حالت ← از داخل سیستم مطلع می‌شویم

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad Y = CX + Du$$

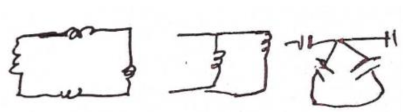
برداری از حالت‌های سیستم $\longrightarrow X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$

* ممکن است ورودی/ خروجی‌ها هم جزء حالت‌های سیستم باشد.

استاندارد می‌گوید ← حالت‌های ما مربوط به عناصر ذخیره‌کننده انرژی می‌باشد

* اگر مداری داشته باشیم ← به تعداد سلف و خازن‌ها حالت داریم

* به تعداد حلقه‌های کاملا سلفی و کات ست‌های خازنی ← از تعداد حالات موجود کاسته می‌شود



A یک ماتریس $n \times n$ و شامل ارتباط $\dot{x}$ و x است $\quad A[\ \ ]_{n\times n}$

U ورودی‌های سیستم می‌باشد $\quad u \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$

B ماتریس $n \times m$ ← ارتباط $\dot{x}$ با ورودی‌ها $\quad B[\ \ ]_{n\times m}$

C برای سیستم‌های خطی و ورودی خروجی واحد SiSO یک عدد می‌شود $\quad C \times\longrightarrow (1\times n)(n\times 1)$

برای سیستم‌های غیرخطی ← تابع تبدیل نداریم

مدل غیرخطی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

کنترل مقاوم: برای اینکه سیستم در مقابل نامعینی‌های پیش‌بینی نشده در محدوده شخص پایدار و به هدف موردنظر برسد ← کنترل مقاوم استفاده می‌شود.

کنترل تطبیقی: عبارت است از تطبیق سیستم با تغییر پارامترهای خود

کنترل هوشمند: روش‌های نوین ← عمدتاً برداشت از طبیعت (کنترل‌کننده‌های فازی-شبکه‌های عصبی- ژنتیک)

اصلی‌ترین فصل ← فصل پایداری

لیاپانوف ← سیستمی پایدار است که انرژی‌اش کاهشی باشد ← از این روش ← برای بررسی پایداری سیستم‌ها استفاده می‌شود

ماتریسها، دترمینان، مقادیر ویژه کار شود.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} \qquad 2\times 2 \longleftarrow A^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^{*} \qquad C^{*}=\begin{bmatrix}A & B & C\\ D & E & F\\ G & H & I\end{bmatrix}^{T}$$

$$A=(-1)^{2}(ei-hf)$$

$$B=(-1)^{3}(di-gf)$$

$$C=(-1)^{4}(dh-ge)$$

فصل سوم: نمایش سیستم‌های خطی

$$\text{سیستم غیر خطی} \quad \begin{cases}\dot{x}=f(x_1u_1t)\\ y=g(x_1u_1t)\end{cases}\xrightarrow{\text{خطی‌سازی}}\begin{cases}X=A\dot{x}+Bu\\ y=CX+Du\end{cases}$$

خطی سازی ← به شرطی جواب می‌دهد که حول نقطه کار باشد

معمولا خطی‌سازی برای تابع $\dot{x}$ انجام می‌شود.

روش اول خطی‌سازی (ژاکوبین)

$$\begin{cases}\dot{x_1}=f_1(\quad)\\ \dot{x_2}=f_2(\quad)\\ \quad\vdots\\ \dot{x_n}=f_n(\quad)\end{cases}\xrightarrow{\text{ژاکوبین}}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}\\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}\end{bmatrix}$$

مثال: معادلات غیرخطی سیستمی عبارتند از

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1^2(t) - \sin 3x_2(t) + u_1^3(t) - u_2(t) = f_1(t) \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) - u_1(t) + x_1(t)_e - x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

نقطه کار مبدا $\hat{u}(t) = 0$ و $\hat{x}(t) = 0$ را در نظر بگیرید ← خطی‌سازی حول نقطه موردنظر انجام پذیرد ماتریکس‌های جاکوبین را تشکیل می‌دهیم

$2x_1$ $-3 \longrightarrow 3x_2$

$$J_x[\hat{x}(t)_1 \hat{u}(t)_1 t] \longrightarrow J_x[0] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

0 $1 - \cancel{x_1 e}$

$1 \times e^{-x_2} = 1 \times e^0$

$$\dot{J}_u[\hat{x}(t)_1 \hat{u}(t)_1 t] \longrightarrow \dot{J}_u = \begin{bmatrix} * \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

یادآوری $\longrightarrow f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$

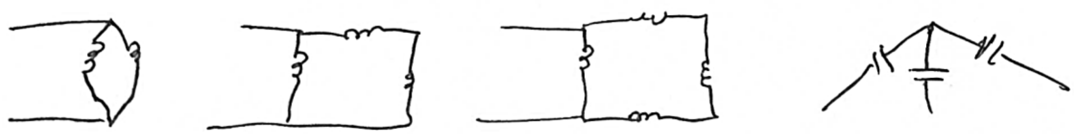
$$\dot{J_x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_u[0] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

که در آن $\Delta u(t)$ و $\Delta x(t)$ ← تغییرات جزئی حول نقطه کار هستند.

راهنمای مشتق‌ها :

$$\underset{A}{\dot{J}_x[0]} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -3\cos 3x_2 \\ e^{-x_2} & 1 - x_1 e - x_2 \end{bmatrix}_{(0/0)} \qquad \underset{B}{\dot{J}_u[0]} = \begin{bmatrix} eu_1^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(0/0)}$$

عناصر ذخیره‌کننده انرژی: به تعداد این عناصر حالت داریم و به تعداد حلقه‌های کاملا سلفی و کات ست‌های خازنی از تعداد حالات کاسته می‌شود.



۱) ابتدا تعداد حالت‌های مدار را مشخص می‌کنیم.

۲) سپس تعداد ورودی‌های مدار را مشخص می‌کنیم.

۳) برای هر خازن ← ولتاژ آن بیانگر حالت آن می‌باشد / برای هر سلف ← جریان آن بیانگر حالت آن می‌باشد.

۴) برای هر کدام از حالت‌ها با استفاده از قوانین کیرشهف حاکم بر مدار ← یک معادله مرتبه اول بدست می‌آوریم (یکی از عناصر مشتق داشته باشد آن‌هم مشتق مرتبه اول)

* نکته: معمولا $\left\{ \begin{array}{l} \text{برای سلف‌ها} \longrightarrow KvL \\ \text{و برای خازن‌ها} \longrightarrow KcL \end{array} \right.$ که معادله مرتبه اول را بنویسیم

مثال: مدار الکتریکی نشان داده شده را در نظر بگیرید با انتخاب مناسب متغیرهای حالت، یک نمایش فضای حالت از آن به دست آورید. فرض می‌شود که در این مدار منابع ولتاژ $e_1(t)$ و $e_2(t)$ قابل تنظیم بوده و بنابراین می‌توان سیستم را کنترل نمود. سه متغیر حالت i_1 ، i_2 و $v(t)$ داریم. همچنین دو ورودی e_1 و e_2

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix}$$

$\leftarrow Kvl_1$

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = x_1 \\ i_2 = x_2 \\ v_c = x_2 \\ e_1 = u_1 \\ e_2 = u_2 \end{array}\right\}$$

$$-e_1 + Ri_1 + Vl_1 + Vc = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزینیها}} -u_1 + Rx_1 + VL_1 + x_3 = 0$$

$$VL_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \dot{x_1}$$

$$l_1 \dot{x_1} = -Rx_1 - x_2 + u_1 \Rightarrow \dot{x_1} = \frac{1}{L_1}(-R_1 x_1 - x_2 + u_1) \quad ۱$$

$\leftarrow Kvl_2$

$$-e_2 + vl_2 + vc = 0 \xRightarrow{\text{جایگزینیها}} -u_2 + vl_2 + x_3 = 0 \Rightarrow vl_2 = l_2 \dot{x_2} = l_2 \frac{di_2}{dt} = u_2 - x_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{l_2}(u_2 - x_2) \quad 2$$

$$i_1 + i_2 = i_c \Rightarrow i_1 + i_2 - i_c = 0 \rightsquigarrow i_c = \frac{cd_v}{d_2} = C\dot{x}_3 \rightsquigarrow \dot{x}_3 = \frac{1}{C}(x_1 + x_2) \quad ۳$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

مثال ص۸ اسلاید شماره ۱۵ ← حل شد / مثال اسلاید شماره ۱۷ ← خانه حل شود

بخش چهارم: کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری

سیستمی کنترل‌پذیر است از دیدگاه حالت $x_0 \longrightarrow x_1$ ببریم x_0 موجود x_1 دلخواه

ساده‌ترین متد: برای بررسی اینکه بدانیم یک سیستم کنترل‌پذیر است یا خیر

گام اول: تشکیل ماتریس $\emptyset C$

$$\emptyset C = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\cdots\; A^{n-1}B]$$

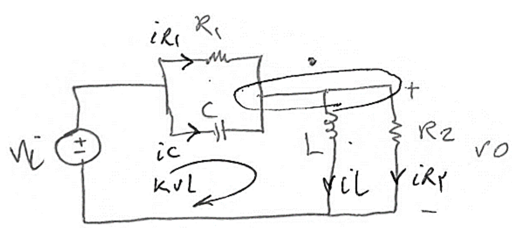
گام دوم: سیستمی کنترل‌پذیر است که رنک $\emptyset C$ کامل باشد ← یعنی n باشد

مثال: تشکیل $\emptyset C$ به منظور کنترل‌پذیر بودن یا خیر

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\emptyset C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |\emptyset C| = 0 - 1 = -1$$

$$\neq -1$$



در صورتی‌که ماتریس $\emptyset C$ مربعی شد ← اگر $\underbrace{|\emptyset C|}_{\text{دترمینال}} \neq 0$

باشد ← رنگ $\emptyset C$ کامل می‌شود

مثال: ص۲۷ اسلاید ۱۴: R1 = R2 = R

معادلات حالت را بدست آورید و کنترل‌پذیری آن را بررسی کنید

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_c \\ x_2 &= il \\ u &= v_i \\ y &= v_o \end{aligned}\right\}$$

$$kvl \Rightarrow -v_i + v_c + vl = 0 \Longrightarrow -u + x_1 + L\dot{x}_2 \quad vl = \frac{ld_i}{d_t} = L\dot{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}(-x_1 + u)$$

$$iR_1 + iC - il - iR_2 \Rightarrow \frac{x_1}{R} + c\dot{x}_1 - x_2 - \left(\frac{u - x_1}{R}\right) = 0$$

$$\frac{vc}{R_2} = \frac{x_1}{R}$$

$$C\dot{x}_1=-\frac{x_1}{R}+\frac{u-x_1}{R}+x_2\Rightarrow \dot{x}_1=\frac{1}{C}\left[\frac{-2x_1}{R}+x_2+\frac{u}{R}\right]\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{R_c} & \frac{1}{C}\\ \frac{-1}{1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{+1}{Rc}\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u$$

و ادامه ندارد$[B\quad AB]$ $AB\Rightarrow \emptyset_c=$ همان $\Longrightarrow n=2\Rightarrow A^{n-1}B=\longrightarrow$ برای $\emptyset_c$ این مثال

$$\emptyset_c=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_c} & \frac{-2}{R^2C^2}+\frac{1}{Lc}\\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLc}\end{bmatrix}\Rightarrow|\emptyset_c|=-\frac{1}{R^2C^2L}+\frac{2}{R^2C^2L}-\frac{1}{L^2C}=\frac{1}{R^2C^2L}-\frac{1}{L^2C}$$

← رتبه ۲ می‌باشد ← سیستم کنترل‌پذیر است و $|\emptyset_C|\neq 0$

مثال: کنترل‌پذیری تابع تبدیل حالت را چک کنید.

$$\dot{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -۲ & ۱\\ ۱ & -۲ & -۱\\ -۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}}_{n=3\qquad A}x+\underbrace{\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}}_{B}u \qquad\qquad \emptyset_c=[B\quad AB\quad A^2B]$$

$$\emptyset_c=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\mathrm{B}\qquad & \mathrm{AB}\qquad & \mathrm{A^2B}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & -۲ & ۱ & ۴ & -۹\\ 1 & -۱ & -۲ & ۳ & ۴ & -۳\\ ۱ & ۰ & -۲ & -۲ & ۴ & ۶\end{bmatrix}\end{array}$$

ABA²B حاصلضرب A در AB

$maxRank\ (\emptyset_c)=\min(n,m)$

* در ماتریس‌های غیرمربعی:

3×6

$n\times m$

می‌فهمیم n یا m ← هرکدام که بود

$Rank\ (\emptyset_c)=3\Rightarrow rank\ A\Longrightarrow$ سیستم کنترل پذیر است

* اگر به عنوان مثال $Rank\ (\emptyset_c)=2$ می‌شد ← کنترل‌پذیر نبود مثلا $\emptyset_c=[\qquad]_{2\times 6}$

مثال: کنترل‌پذیری ماتریس حالت سیستم را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

وابستگی ستون (رابطه)→ $e_3=-6e_1-5e_2$

$$\emptyset_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & \quad \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \rightsquigarrow |\emptyset_c| = 0$$

مستقل خطی

3×3

← سیستم کنترل‌پذیر نیست.

* برای جدا کردن قسمت‌های کنترل‌ناپذیر مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: ماتریس انتقال ζ که شامل بردارهای مستقل خطی ماتریس $\emptyset_c$ می‌باشد و برداری جایگزین برای بردار وابسته خطی ماتریس $\emptyset_c$ انتخاب کرده تشکیل می‌دهیم. در مثال قبل ← $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e_1 e_2 طوری انتخاب می‌کنیم که وابسته خطی نباشد

گام دوم: سپس ζ^{-1} را حساب می‌کنیم

در مثال قبل: $\zeta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

گام سوم: محاسبه

$$A^* = \zeta^{-1} A \zeta = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^* = \zeta^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و ماتریس مربعی را طوری تشکیل می‌دهیم

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad B'$$

حال می‌توانیم کنترل‌پذیری A و B جدید را چک کنیم

$$\emptyset'_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightsquigarrow |\emptyset'_C| = 1$$

زیرسیستم کنترل‌پذیر

کنترل‌پذیری:

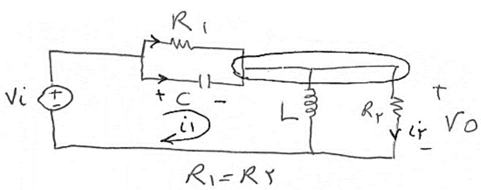
$$\dot{X} = \underset{n \times n}{A}x + Bu \qquad y = Cx + \underset{\text{ماتریس انتقال مستقیم}}{D}u$$

$$\emptyset_c = [B \quad AB \quad A^2B \ldots \; A^{n-1}B]$$

شرط کنترل‌پذیری:

اگر رنگ $\emptyset_c$ n باشد ← سیستم کنترل‌پذیر است.

شرط رویت‌پذیری:



$$\emptyset_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ C^2A \\ \vdots \\ C^{n-1}A \end{bmatrix}$$

اگر رنگ $\emptyset_0$ ، n باشد ← سیستم رویت‌پذیر است

مثال:

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -6\\ 1 & -5\end{bmatrix}}_{A} X + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{[1 \quad 1]}_{C} X$$

$$\emptyset_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -11\end{bmatrix} & \begin{array}{c} C \\ CA \end{array} \end{array} \rightarrow det = -12 \neq 0$$ سیستم رویت‌پذیر

$$\emptyset_C = [B \quad AB] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & AB \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \end{array} \rightarrow det =$$

مثال: رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری را بررسی کنید.

$$X_1 = Vc \qquad u = vi$$

$$X_2 = il \qquad y = vo$$

$$ic = C\frac{dvc}{dt} \Rightarrow ic = c\dot{x}_1$$

$$iR_1 + ic - il - iR_2 = 0 \rightsquigarrow \frac{x_1}{R_1} + c\dot{x}_1 - x_2 - \frac{(vi - x_1)}{R_2}$$

چون $R_1 = R_2$ بود $\leftarrow$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[-\frac{x_1}{R} + x_2 + \frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\underbrace{-\frac{x_1}{R} - -\frac{x_1}{R}}_{\frac{-2x_1}{R}} + x_2 + \frac{6}{R}\right] \Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = \frac{-2}{RC}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \frac{u}{RC}}$$ ۱

$$-vi + vc + vl = 0$$

$$vl = vi - vc = u - x_1$$

$$vl = l\frac{dil}{dt} = L\dot{x}_2 \Rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = \frac{-1}{l}x_1 + \frac{1}{l}u}$$ ۲

$$\boxed{y = v0 = vl = u - x_1}$$

کنترل‌پذیری انجام شد. در معادله خروجی (y)، u ظاهر شده (ورودی) و از طریق آن کنترل‌پذیر است.

مرحله بعد رویت‌پذیری

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-2}{RC} & \frac{1}{C}\\ \frac{-1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + u$$

$$\emptyset_0 = \begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ \frac{2}{RC} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}$$

$$|\emptyset_0| = \frac{1}{C} \neq 0$$

سیستم رویت‌پذیر است.

رویت‌پذیری را بررسی کنید.

ماتریس رویت‌پذیری عبارت است از:

$$
\emptyset_{.} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{c}
e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
-1 & -2 & -1 \\
-1 & -2 & 0 \\
1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
c \\ \\ cA \\ \\ cA^2 \\ \\
\end{array}
$$

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

که رتبه ۳ است لذا رویت‌پذیر است.

$$e_4 = e_5 - e_2$$

$$e_1 = e_5 + e_2$$

ماتریس فوق ۳ × ۶ بوده است که با حذف *e1* و *e4* به ماتریس ۳ × ۴ تبدیل شده است.

مثال: رویت‌پذیری سیستم فوق را بررسی کنید.

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u
\qquad
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x
$$

$$
\emptyset_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

چون یک ستون صفر است پس
دترمینان صفر می‌شود

بنابراین رنک $\emptyset_0$ ، ۲ نمی‌باشد پس سیستم رویت‌ناپذیر است.

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} = [ac + bd \qquad ad + bf]$$

$$e_3 = -e_1 + 2e_2$$

اگر سیستمی رویت‌ناپذیر بود، این بدان معنا نیست که کل حالت‌های سیستم رویت‌ناپذیر است

برای جدا کردن حالت‌های رویت‌پذیری از حالت‌های رویت‌ناپذیر ماتریس انتقال $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$ u با استفاده از

بردار جایگزین

بردارهای مستقل $\emptyset_0$ و بردارهای جایگزین بردارهای وابسته به خطی $\emptyset_0$ تشکیل می‌دهند. بردارهای جایگزین باید مستقل از بردارهای خطی باشند.

مثال: ۳-۱۷ معادلات حالت و خروجی سیستم عبارت است از

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad\qquad y(t) = [0 \;\; 0 \;\; 1]x(t)$$

ماتریس رویت‌پذیری سیستم عبارت است از

$$\emptyset_0 = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۱ \end{bmatrix} \qquad\qquad u = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$u^{-1} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \;, u^{-1}Au = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & - \end{bmatrix}$$

دو سطر بالا را جدا می‌کنیم

$$Cu^{-1} = [1 \;\; 0 \;\; 0]$$

از معادلات داریم

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \emptyset_0 = \begin{bmatrix} G^* \\ G^*A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس رنک $\emptyset_0$، ۲ است، بنابراین C و A رویت‌پذیر هستند.

کانونیکال رویت‌پذیر رویت

$$x'(t) = \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} x'(t) + \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [C'_1 \qquad 0]x'(t)$$

A'_{11} یک ماتریس $m \times m$ و جفت $[A'_{11} \qquad C'_1]$ کاملا رویت‌پذیر است

مقادیر ویژه A'_{11} را قطب‌های رویت‌پذیر و مقادیر ویژه $A'_{۲۲}$ را قطب‌های رویت‌ناوذیر گویند.

بنابر تعریف: اگر قطب‌های رویت‌ناپذیر سیستم (مقادیر ویژه $A'_{۲۲}$) پایدار باشند سیستم را آشکارپذیر گویند.

تئوری تحقیق: نحوه تبدیل تابع تبدیل به فضای حالت و برعکس (بازسازی)

تئوری تحقیق Realization G(s)→ $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$

بازسازی $Reconstruction\ G(s) \leftarrow$

تحقق کنترل‌پذیری:

یادآوری: با فرض اکیدا سره بودن سیستم ← D را نداریم. (تابع تبدیل‌هایی که مرتبه صورت از مرتبه مخرج کمتر است)

$\dot{x} = [\quad]x + [\quad]u$ $\qquad\qquad y = [\qquad]x$

اگر درجه صورت و مخرج باهم برابر باشد ← سره

اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد ← ناسره

$$\begin{bmatrix} 0 & \overbrace{1 \quad 0 \quad 0}^{A} & 0 \\ 0 & 0 \quad 1 \quad 0 & 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 1 & 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی و زیر آن همگی صفر

داریه بالای قطر اصلی ۱ و بالاتر همگی صفر

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{1s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

ضریب بایستی ۱ باشد درغیراینصورت آن را یک می‌کنیم

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{B} \qquad \underbrace{[b_0 b_1 \ldots\ b_{n-1}]}_{C}$$

مثال: مدل فضای حالت تابع تبدیل را بنویسید.

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 4s + 5}$$

$$\dot{X} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۵ & -۴ & -۲ \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{matrix}\end{array} x + \begin{bmatrix}0\\0\\۱\end{bmatrix} u \qquad y = [\underset{b_0}{1} \quad \underset{b_1}{3} \quad \underset{b_2}{2}]x$$

مثال: مدل فضای حالت (تحقق کنترل‌پذیری)

$$G_{(s)} = \frac{s+1}{s^3+s}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{B} \qquad \underbrace{[1 \ \ 1 \ \ 0]}_{C}$$

رویت‌پذیری: همیشه کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری دوگان هم هستند.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_{n-1}\end{bmatrix} u\,, y = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]_k$$

مثال‌های قبل را بنویسید (رویت‌پذیری)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix}0 & & -5\\1 & 0 & -4\\ & 0 & -2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\\۳\end{bmatrix} u \qquad y = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} u \qquad y = [0 \quad 0 \quad 1]$$

بازسازی *Reconstruction*

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B$$

ابتدا $(SI - A)^{-1}$ را بدست می‌آوریم

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = [1 \quad 1] x$$

$$s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (SJ - A)^{-1} = \frac{1}{det}\overset{\text{کهاد}}{\begin{bmatrix} & - \\ - & \end{bmatrix}} \Rightarrow \frac{1}{s(s+1)+2}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \Rightarrow G(s)$$

$$= \frac{1}{s^2+s+2}[1 \quad 1]\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{s^2+s+2}[s-1 \quad s+1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{s^2+s+2}$$

مثال:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad\qquad y = \underbrace{[1 \quad 1]}_{C} x$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \Rightarrow SI - A = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s-3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow (\quad)^{-1} = \frac{1}{det}\text{کهاد} = \underbrace{\frac{1}{s(s-3)+2}\begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}}_{(SI-A)^{-1}}$$

$$\Rightarrow G(S) = \frac{1}{s^2+3s+2}[1 \quad 1]\begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(S) = \frac{1}{s^2-3s+2}[s-2 \quad s-2]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5(s-2)}{s^2-3s+2}$$

اهداف کنترل: ۱) پایداری *(Stability)* ۲) تنظیم کردن *(Setting)* ۳) دنبال کردن *(Tracking)*

پس اولین و مهم‌ترین هدف ← پایداری است (اصلی‌ترین هدف)

شرط پایداری در مدل‌های تابع تبدیل ← قطب‌های تابع تبدیل (در ریشه‌های مخرج) سمت چپ محور موهومی باشد (دارای قسمت حقیقی منفی باشد)

مثال: پایدار $P = -1, -3 \Rightarrow$

$$G(S) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$$\text{مدل فضای حالت} \quad \begin{cases} \dot{X} = Ax + Bu \xleftarrow{\text{تحقق}} \\ y = Cx + Du \xrightarrow{\text{بازسازی}} \end{cases} G(S) = \frac{Q(S)}{P(S)}$$

لیاپانوف: معیار پایداری برای سیستم‌های مدل فضای حالت (هر سیستمی پایدار است ← به شرطی که انرژی‌اش کاهشی باشد)

نقطه تعادل: جایی است که $\dot{X} = 0$ می‌شود.

مثال: نقاط تعادل سیستم زیر را به دست آورید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0 \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 = 0 \qquad xe \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{راهنمایی}} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \end{array}$$

مثال: سیستم غیرخطی: نقطه تعادل را بدست آورید.

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [\quad] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - 2x_2 = 0 \end{array}$$

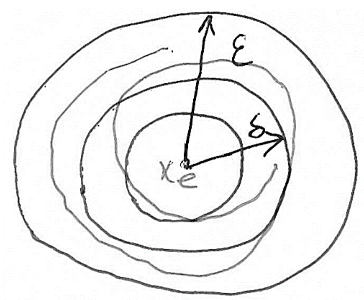
$$x_2^2 - 2x_2 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 0\sqrt[3]{2} \Rightarrow x_1 = 0\sqrt[3]{4}$$

$$x_2(x_2^3-2)=0 \xrightarrow{\text{نقاط تعادل}} Xe\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix}\sqrt[3]{2}\\ \sqrt[3]{4}\end{bmatrix}$$

مثال:

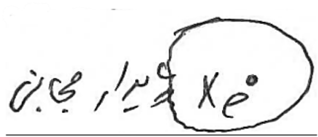
$$\dot{X}=\sin x \qquad \sin x=0 \Longrightarrow x=n\pi \qquad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

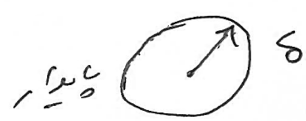
پایداری لیاپانوف: دو دایره در نظر بگیرید ε و δ اگر سیستمی در محدوده ε باشد و کوچکتر شود و وارد دایره δ شود ← دیگر از محدوده δ خارج نشود پایدار است.



* سیستمی پایدار است ← اگر تمام حالت‌های آن که در دایره‌ای به شعاع ε که حول نقطه تعادل است حرکت کرده و وارد دایره‌ای کوچکتر به شعاع δ وارد شود و از آن خارج نشود ← به این سیستم پایدار لیاپانوف می‌گویند.

* اگر حالت‌ها به نقطه تعادل برسند $\xleftarrow{Xe}$ سیستم پایدار مجانبی لیاپانوف است.





حوزه جذب: دایره بزرگتر به شعاع ε را گویند.

ناپایداری: اگر از حوره جذب (دایره بزرگتر) به سمت دایره کوچکتر حرکت نکرد و یا حرکت کرد اما از آن خارج شد ← آن سیستم ناپایدار است.

پایدار فراگیر: اگر حوزه جذب یعنی اندازه شعاع ε بی‌نهایت باشد ← سیستم پایدار فراگیر است.

پایدار مجانبی فراگیر: اگر حوزه جذب یعنی اندازه شعاع ε بی‌نهایت باشد و در نهایت همه حالت‌ها به نقطه تعادل برسند.

پایدار *BIBO*: به ازای ورودی محدود ← خروجی محدود باشد.

قضایای پایداری سیستم‌های LTI

سیستم پایدار به مفهوم لیاپانوف است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه آن دارای قسمت‌های حقیقی نامثبت باشد (یا صفر باشند یا منفی) و مقادیر ویژه موهومی آن تکراری نباشد.

مثال: پایداری سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X$$

اول نقطه تعادل را که قبلا حساب کردیم $X_e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ سپس سراغ مقادیر ویژه می‌رویم.

مقادیر ویژه $\leftarrow$ $|\lambda I - A| = 0$

حال دترمینان را حساب می‌کنیم.

$$\lambda \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -۱ \\ ۱ & \lambda + ۲ \end{bmatrix}$$

سیستم پایدار لیاپانوف است (روش اول)

$$\Rightarrow det|\lambda I - A| = \lambda(\lambda + 2) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \begin{cases} \lambda 1 = -1 \\ \lambda 2 = -1 \end{cases}$$

تمرین: پایداری سیستم زیر را با روش اول لیاپانوف بررسی نمایید.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + (-3)x_2 \end{matrix} \longrightarrow xe \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda J - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ +2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{det\text{محاسبه شود}} [(\lambda - 1)(\lambda + 3)] + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \begin{matrix} \longrightarrow -1 + \sqrt{2} \simeq 0/4 = \lambda_1 \\ -1 - \sqrt{2} \simeq -2/4 = \lambda_2 \end{matrix}$$

چون یکی از λها مثبت شد پس ناپایدار است.

مثال خارج از بحث ← *(سوال دانشجویان)* برای سیستم‌های غیرخطی پایداری را با روش اول لیاپانوف بررسی کنید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 2x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2^2 \end{cases}$$

اول باید نقطه تعادل را بدست آورد ← $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ xe می‌شود خودتان حساب کنید بعد بایستی خطی‌سازی کنیم.

$$\dot{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{[xe]}}_{\text{ماتریس } A \text{ را به ما می‌دهد (خطی‌سازه)}}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \longrightarrow x_2 - 2x^3 = 0 \qquad x_2 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \longrightarrow x_1 - 3x_2^2 = 0 \qquad x_1 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

اول حول نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بررسی می‌کنیم.

ماتریس خطی‌ساز $\frac{\partial f}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & 1 - 6x_2^2 \\ 1 & -6x^2 \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \begin{array}{l} \longrightarrow \lambda_1 = 1 \\ \longrightarrow \lambda_2 = -1 \end{array}$$

سپس سیستم ناپایدار است حول نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

حال حول نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 - 6x_2^2 \\ 1 & -6x_2 \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & \frac{-6}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda J - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -\frac{6}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda + \frac{6}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda\left(\lambda + \frac{6}{\sqrt{2}}\right) + 2 = \lambda^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac}}{2a} = \frac{-\frac{6}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{18-8}}{2} = \frac{-3}{\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

← جواب‌ها هر دو منفی هستند ← پایدار است حول نقطه $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

قضایا:

قضیه ۱): سیستم *LT1* پایدار مجانبی است ← اگر و فقط اگر پایدار مجانبی فرارگیر باشد

سیستم پایدار مجانبی است ← اگر و فقط اگر مقادیر ویژه آن منفی باشد

مقادیر ویژه:
- همگی دارای قسمت حقیقی منفی بود ⟵ پایدار مجانبی
- دارای قسمت حقیقی منفی و صفر (موهومی هم تکراری نباشد) ⟵ پایدار
- اگر سیستم دارای قسمت حقیقی مثبت باشد ⟵ ناپایدار

قضیه ۲): سیستم *LT1* پایدار *BIBO* است اگر و فقط اگر تمام قطب‌های تابع تبدیل ← دارای قسمت‌های حقیقی اکیدا منفی باشد.

نکته: اگر سیستم *LT1* پایدار لیاپانوف باشد ← پایدار *BIBO* یا همان ورودی خروجی محدود هم است *(Bounded Input Bounded Output)* ولی برعکس آن صادق نیست.

پایداری:
- روش اول : لیاپانوف
- روش دوم : لیاپانوف (مبحث این هفته)

اسلاید شماره ۹ ص۱۷و۱۸ ← به استاد یادآوری شود که هفته بعد توضیح دهند.

قضیه: سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا پایدار مجانبی است ← اگر تابع اسکالر اکیداً صعودی $v(x)$ وجود داشته باشد که $\begin{cases} v(x) > 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$ و که انرژی‌اش کاهشی هم باشد $\stackrel{\text{یعنی}}{\Longleftarrow}$ $\{\dot{V} < 0 \quad x \neq 0$ ← سیستم پایدار خواهد بود.

مثال: صفحه ۱۲ اسلاید ۲۴

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2 x_2^3 = f_2$$

$$A = \dot{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \lambda(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

سیستم (λ) نا مثبت است ← پایدار است (روش اول لیاپانوف)

تابع لیاپانوف کاندید (ساده‌ترین شکل)

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}} x_2^2$$

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V} = x_1(-x_1 - 2x_2^2) + 2x_2(x_1 x_2 - x_2^3)$$

$$\dot{V} = x_1^2 - \cancel{2x_1} x_2^2 + \cancel{2x_1} x_2^2 - 2x_2^4 = -x_1^2 - 2x_2^4$$

قرمز بعدا نوشته شده.

با بازنگری مجدد هر تابع لیاپانوف کاندید یا همان تابع اولیه تجربی

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

در این مثال پس از بازنگری و به منظور حذف نامعین‌های ضریب $\frac{۱}{۲}$ از x_2^2 حذف شد.

مثال: سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید در نقطه تعادل $(0\,,0)$ پایداری را بررسی کنید.

$$f_1 = \dot{x}_1 = x_2$$

$$f_2 = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 3x_1^3$$

$$j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ Z & \lambda+3 \end{bmatrix}\right| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ پایدار مجانبی است (با روش اول)

همیشه مثبت است و در صفر هم صفر است.

تجربی می‌نویسیم $\longrightarrow \mathrm{v(x)} = \frac{1}{\cancel{2}}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^4$

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + \frac{4}{2}x_1^3\dot{x}_1$$

$$\longrightarrow 2x_1^3x_2$$

$$\dot{x}_1 = x2$$

$$\xrightarrow{\text{حذف نامعین‌ها}} \dot{V} = 2x_1x_2 + x_2(-2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3) + 2x_1^3x_2$$

$$\dot{V} = 2x_1x_2 - 2\cancel{x_1}x_2 - 3x_2^2 - \cancel{2x_1^3}x_2 + \cancel{2}x_1^3x_2$$

با اعمال ۲

$$\dot{V} = -۳x_2^2 < ۰ \qquad x \neq 0$$

مثال: سیستم زیر با نقطه تعادل مبدا را در نظر بگیرید، پایداری آن را در نقطه تعادل $(0\,,0)$ بررسی کنید.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)\\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{v(x)\text{را در نظر می‌گیریم}} V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\big(-x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)\big) + x_2\big(-x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)\big)$$

$$= -x_1^2 + \cancel{x_1x_2} + x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - \cancel{x_1x_2} - x_2^2 + x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = \underbrace{-x_1^2 - x_2^2}_{\text{فاکتور از منفی}} + x_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= -\underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\text{فاکتور از}} + x_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{V} = \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\text{همیشه +}}\Big[\underbrace{-1 + x_1^2 + x_2^2}_{\text{+ یا − بودن را بررسی می‌کنیم}}\Big] \longrightarrow -١ + x_1^2 + x_2^2 < ٠ \longrightarrow x_1^2 + x_2^2 < ١ \Longrightarrow$$

داخل دایره واحد $\dot{V}(x)$ معین منفی است و

نقطه تعادل مبدا پایدار مجانبی است

$\longrightarrow \quad -\Longrightarrow +.-= -\Longrightarrow$ سیستم پایدار مجانبی

قضیه ناپایداری: سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا ناپایدار است ← اگر تابع اسکالری مانند:

$$\begin{cases}V(x) > 0 \quad , \quad V(0) = 0\\ \dot{V} > 0 \quad , \quad V(0) = 1\end{cases}$$

مثال: صفحه ۱۷ اسلاید ۳۳

$$\dot{x}_1 = 2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^4)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\big(2x_2 + x_1(x_2^2 + 2x_2^4)\big) + x_2\big(-2x_1 + x_2(x_1^2 + 2x_2^4)\big)$$

$$\dot{V} = 2\cancel{x_1}x_2 + x_1^2\underbrace{(x_2^2 + 2x_2^4)}_{+}\cancel{- 2x_1x_2} + x_2^2\underbrace{(x_1^2 + x_2^4)}_{+}$$

$\dot{V}$ همیشه مثبت است ← سیستم ناپایدار است.

$$\dot{x} = AX + Bu$$

معادله لیاپانوف $S^T + PA = -Q$

$y = Cx + Du$

قضیه: سیستم داده شده پایدار مجانبی است ← اگر و فقط اگر Q مثبت معین باشد، P هم مثبت معین باشد.

$Q_{PD} \Longrightarrow P_{PD}$

Positive Definite

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \text{ اگر } \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} |a| > 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} > 0 \\ |A| > 0 \end{matrix} \right\} \Longrightarrow A.PD \text{ (A ثابت معین است)}$$

PS(semi)D = نیمه معین

مثال: اسلاید ۲۰ صفحه۴۰

$\dot{X}_1 = -x_1 - 2x_2$

$\dot{X}_2 = -x_1 - 4x_2$

$A^T P + PA = -Q$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 + P_3 & -P_2 + P_4 \\ -2P_1 - 4P_3 & -2P_2 + P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_1 + P_2 & -2P_1 - 4P_2 \\ -P_3 + P_4 & -2P_3 - 4P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{حال درایه های نظیر را باهم جمع می‌کنیم}$$

$$\begin{cases} -۲P_1 + P_2 + P_3 = -۱ \\ -۲P_1 - 5P_2 + P_4 = 0 \\ \cancel{-۲P_1 - 5P_3 + P_4 = 0} \\ -۲P_2 - -۲P_3 - 8P_4 - 1 \end{cases} \Longrightarrow P_2 = P_3 \Longrightarrow \begin{cases} -۲P_1 + ۲P_2 = -1 \\ -۲P_1 - 5P_2 + P_4 = 0 \\ -4P_2 - 8P_4 = -1 \end{cases}$$

$P_4 = 2P_1 + 5P_2$

$$\xrightarrow{x-8} \begin{cases} -۲P_1 + ۲P_2 = -1 \\ -16P_1 - 44P_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 16P_1 - 16P_2 = 8 \\ \underbrace{-16P_1 - 44P_2 = -1}_{-60P_2 = 8 \Longrightarrow P_3 = P_2 = \frac{8}{60}} \end{cases}$$

$$P_3 = P_2 = -\frac{8}{60} \rightsquigarrow P_1 = \frac{23}{60} \qquad P_4 = \frac{11}{60}$$

$$\Longrightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{230}{60} & \frac{-7}{60} \\ \frac{-7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix} \qquad \frac{23}{60} > 0 \qquad |P| = \frac{204}{3600} > 0$$

مثال: k را طوری پیدا کنید که سیستم پایدار باشد. اسلاید ۲۱ صفحه۴۰

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -3k \\ 2k & -5k \end{bmatrix}}_{A} x$$

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2k \\ 3k & -5k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3k \\ 2k & -5k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{12}k & \frac{-1}{4k} \\ \frac{-1}{4k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{شروط پایداری}} \frac{7}{12k} > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$\frac{7}{48k^2} - \frac{1}{16k^2} > 0 \Rightarrow \frac{4}{48k^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \cancel{k < 0} \end{cases}$$

پایان جلسه

روزگار خوشی را برای شما آرزومندم.

محمد اعرابیان